Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 4

2a. edição

ESCOLA NAVAL

2010-2016

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola Naval (EN) dos anos de 2010 a 2016 detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto, totalizando 180 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 7 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Escola Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ/2015); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madematica".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante a elaboração dessa obra e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira (julho de 2016)

Acompanhe o blog www.mademática.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2016 – 2ª edição
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 5 Colégio Naval 1984-2015 – 2ª edição
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2015/2016

1) Em uma P.G., $a_4 = \frac{2(k^2+1)^2}{5k}$ e $a_1 = \frac{25k^2}{4(k^2+1)}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Para o valor médio M de k, no intervalo onde a P.G. é decrescente, o resto da divisão do polinômio $P(x) = \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 25x^2 - 10$ pelo binômio $\left(Mx - \frac{15}{8}\right)$ é

a) $\frac{1039}{32}$

b) $\frac{1231}{16}$

c) $\frac{1103}{32}$

d) $\frac{1885}{32}$

e) $\frac{1103}{16}$

2) Analise o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x-2my+3z=0 \\ 2x+6y-4mz=0 \end{cases}$$

Para o maior valor inteiro de m que torna o sistema acima possível e indeterminado, pode-se afirmar que a expressão $\left|\text{tg}\left(\frac{\pi m}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi m}{3}\right) - 1\right|$ vale

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $-\frac{11}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $-\frac{1}{4}$

3) Resolvendo $\int \frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\cos^4(2x) - \frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{\operatorname{cotg}(2x)}\right]}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\sqrt{\sec^2(2x)-1}}\sec^2(x)\,dx$ encontra-se

a) $-\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}(2x)+c$

b) $-\frac{1}{2}e^{-2\operatorname{tg}x}+c$

c) $\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)+c$

d) $-\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+c$

e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}\sec(4x)+c$

4) A soma dos três primeiros termos de uma P.G. crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos nessa ordem, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

a) 1
b) 4
c) 8
d) 9
e) 11

5) Uma reta r passa pelo ponto $M(1,1,1)$ e é concorrente às seguintes retas: $r_1:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3-2t \\ z=2-t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ e $r_2:\begin{cases} x=4-t \\ y=2-5t \\ z=-1+2t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$. Pode-se dizer que as equações paramétricas dessa reta r são

a) $\begin{cases} x=1+11t \\ y=1+22t \\ z=1-25t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=1+25t \\ y=1+22t \\ z=1+8t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 - 25t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = 1 + 11t \\ z = 1 + 4t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 - 25t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 + 8t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

6) As retas $r_1 : 2x - y + 1 = 0$; $r_2 : x + y + 3 = 0$ e $r_3 : \alpha x + y - 5 = 0$ concorrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3\text{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{tg}\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$ é

a) $3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $2 + \frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

7) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = \begin{cases} 4x - 3, \text{ se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - x^2, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$.

Sendo assim, pode-se dizer que $(f \circ g)(x)$ é definida por

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ x^4 - x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x+1, \text{ se } x \geq 2 \\ 1-4x^2, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x+1, \text{ se } x \geq 2 \\ 1-4x^2, \text{ se } -1 < x \leq 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x+1, \text{ se } x > 2 \\ -1-4x^2, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ x^4 - x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

8) Um plano π_1 contém os pontos $M(-1,3,2)$ e $N(-2,0,1)$. Se π_1 é perpendicular ao plano $\pi_2 : 3x - 2y + z - 15 = 0$, é possível dizer que o ângulo entre π_1 e o plano $\pi_3 : x - y + z - 7 = 0$ vale

a) $\arccos\left(\frac{8\sqrt{2}}{15}\right)$

b) $\text{arccot}\left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

c) $\arccos\left(-\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

d) $\arccos\left(\frac{61}{45\sqrt{2}}\right)$

e) $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{194}}{16}\right)$

9) Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de $60°$ com suas bases, então a razão entre o volume de uma esfera de raio $24^{1/6}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$

b) $\frac{81\pi}{8}$

c) $\frac{8\pi}{81}$

d) $\frac{8\pi}{27}$

e) $\frac{81}{8\pi}$

10) Um gerador de corrente direta tem uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms. E e r são constantes. Se R ohms é a resistência externa, a resistência total é $(r + R)$ ohms e, se

P é a potência, então $P=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$. Sendo assim, qual é a resistência externa que consumirá o máximo de potência?

a) 2r
b) $r+1$
c) $\frac{r}{2}$
d) r
e) $r(r+3)$

11) Calculando $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{tgx-x}{x-\operatorname{sen}x}+\frac{x-\operatorname{sen}x}{tg^3x}\right\}$ encontra-se

a) $\frac{7}{3}$
b) $\frac{13}{6}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{13}{3}$
e) $\frac{7}{6}$

12) O ângulo que a reta normal à curva C, definida por $f(x)=x^{x-1}$, no ponto $P(2,2)$, faz com a reta $r:3x+2y-5=0$ é

a) $\theta=\arccos\left((5+4\ln 2)\left(13(2+4\ln 2+4\ln^2 2)^{-1/2}\right)\right)$
b) $\theta=\arccos\left((5+4\ln 2)\left(13(2-4\ln 2+4\ln^2 2)^{-1/2}\right)\right)$
c) $\theta=\arccos\left((5+4\ln 2)\left(13(2+4\ln 2-4\ln^2 2)^{-1/2}\right)\right)$
d) $\theta=\arccos\left((5+4\ln 2)\left(13(2+4\ln 2+4\ln^2 2)\right)^{-1/2}\right)$
e) $\theta=\arccos\left((5+4\ln 2)\left(13(2+4\ln 2+4\ln^2 2)\right)\right)^{-1/2}$

13) As curvas representantes dos gráficos de duas funções de variável real $y=f(x)$ e $y=g(x)$ interceptam-se em um ponto $P_0(x_0,y_0)$, sendo $x_0\in D(f)\cap D(g)$. É possível definir o ângulo formado por essas duas curvas no ponto P_0 como sendo o menor ângulo formado pelas retas tangentes àquelas curvas no ponto P_0. Se $f(x)=x^2-1$, $g(x)=1-x^2$ e θ é o ângulo entre as curvas na interseção de abscissa positiva, então, pode-se dizer que o valor da expressão $\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos 2\theta-\operatorname{cossec}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^{1/2}$ é

a) $\frac{\sqrt{82}}{5}$

b) $3\frac{\sqrt{2}}{5}$

c) $\frac{68}{25}$

d) $\frac{7}{25}$

e) $2\frac{\sqrt{17}}{5}$

14) Considere os números complexos da forma $z_n = \rho \operatorname{cis}\left((17-n)\cdot\frac{\pi}{50}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O menor número natural n, tal que o produto $Z_1 \cdot Z_2 \cdot \ldots \cdot Z_n$ é um número real positivo, é igual a

a) 8
b) 16
c) 25
d) 33
e) 50

15) O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, se transformando no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_0 \cdot e^{-\alpha t}$, onde $N(t)$ é a quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N_0 é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre

a) 500 e 1000 anos.
b) 1000 e 1500 anos.
c) 1500 e 2000 anos.
d) 2000 e 2500 anos.
e) 2500 e 3000 anos.

16) Uma função $y = f(x)$ é definida pelo determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 & x-1 & x & -2 \\ x^3 & x & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ em cada $x \in \mathbb{R}$ tal que A é invertível. É correto afirmar que o conjunto imagem de f é igual a

a) $(-\infty, 4]$

b) $\mathbb{R} - \{0, 4\}$

c) $(-\infty, 4] - \{0\}$

d) $(-\infty, 4)$

e) $[4,+\infty)$

17) No limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$, o valor de <u>a</u> pode ser determinado para que tal limite exista. Nesse caso, o valor do limite é

a) $-\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $-\frac{1}{8}$

e) 0

18) Três cones circulares C_1, C_2 e C_3, possuem raios R, $\frac{R}{2}$ e $\frac{R}{4}$, respectivamente. Sabe-se que possuem a mesma altura e que $C_3 \subset C_2 \subset C_1$. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto de C_1, a probabilidade de que esse ponto esteja em C_2 e não esteja em C_3 é igual a

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{16}$

e) $\frac{3}{16}$

19) Seja ABCD um quadrado de lado ℓ, em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Pode-se dizer que a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A, B, Q e P vale

a) $\frac{3\ell^2}{16}$

b) $\frac{\ell^2}{16}$

c) $\frac{3\ell^2}{8}$

d) $\frac{\ell^2}{8}$

e) $\frac{3\ell^2}{24}$

20) Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 30º. Se o lado do polígono mede ℓ unidades de comprimento, o volume da pirâmide, cuja base é esse polígono e cuja altura vale o triplo da medida do lado, é igual a

a) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\ell\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{3}$

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2014/2015

1) Considere

$$P(x) = (m-4)(m^2+4)x^5 + x^2 + kx + 1$$

um polinômio na variável x, em que m e k são constantes reais. Quais os valores das constantes m e k para que $P(x)$ não admita raiz real?

(A) $m = 4$ e $-2 < k < 2$
(B) $m = -4$ e $k > 2$
(C) $m = -2$ e $-2 < k < 2$
(D) $m = 4$ e $|k| > 2$
(E) $m = -2$ e $k > -2$

2) Considere as funções reais $f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor da função composta $(g \circ f^{-1})(90)$?

(A) 1
(B) 3
(C) 9
(D) $\frac{1}{10}$
(E) $\frac{1}{3}$

3) Sabendo que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, qual é o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{\arccos^3\left(\log \frac{x}{10}\right)}{\sqrt{4x - x^3}}$?

(A) $]0, 2[$
(B) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$
(C) $]0, 1]$
(D) $[1, 2[$
(E) $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$

4) Considere a sequência $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1+2}{1+2}$; $x_3 = \frac{1+2+3}{1+2+4}$; $x_4 = \frac{1+2+3+4}{1+2+4+8}$; … .O valor de x_n é

(A) $\frac{n+1}{2}$
(B) $\frac{n(n-1)}{2^n}$

(C) $\frac{n(n+1)}{2^n-1}$

(D) $\frac{n(n+1)}{2^n}$

(E) $\frac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$

5) A função real de variável real $f(x)=\frac{2x-a}{bx^2+cx+2}$, onde a, b e c são constantes reais, possui as seguintes propriedades:

I) o gráfico de f passa pelo ponto $(1,0)$ e

II) a reta y = 1 é um assíntota para o gráfico de f.

O valor de $a+b+c$ é

(A) -2

(B) -1

(C) 4

(D) 3

(E) 2

6) Se o limite $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}\right)$ representa a derivada de uma função real de variável real $y=f(x)$ em $x=a$, então a equação da reta tangente ao gráfico de $y=f(x)$ no ponto $(a,f(a))$ é

(A) $32y-x=48$

(B) $y-2x=-30$

(C) $32y-x=3048$

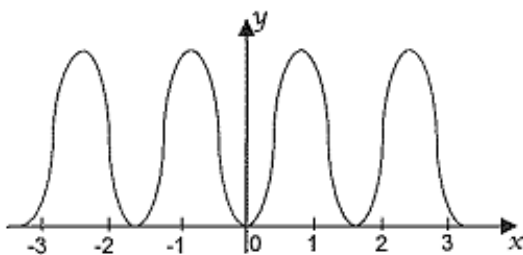
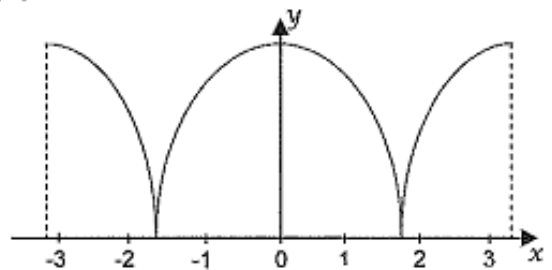
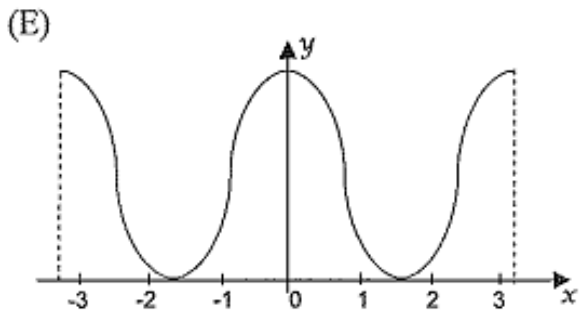
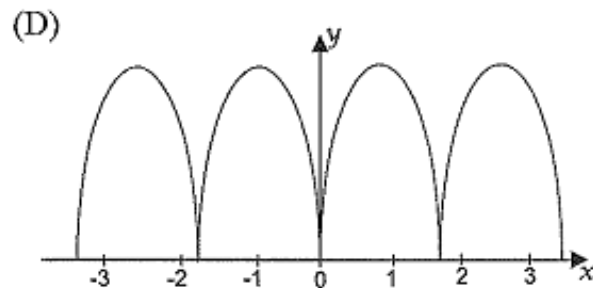
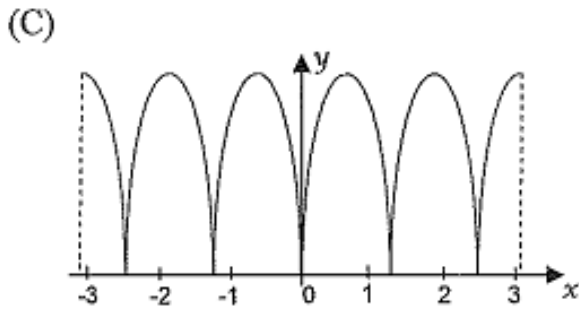
(D) $y-32x=12$

(E) $y-2x=0$

7) Sejam A a matriz quadrada de ordem 2 definida por $A=\begin{bmatrix} 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos(x+\pi) \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$ e f a função real tal que $f(x)=\left|\det\left(A+A^T\right)\right|$, onde A^T representa a matriz transposta de A. O gráfico que melhor representa a função $y=f(x)$ no intervalo $-\pi\le x\le\pi$ é

(A)

(B)

(C)

8) Considere a função real de variável real $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Para que valore da constante real k, a equação $f(x) = k$ possui exatamente 3 raízes reais?

(A) $k < -\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$

(C) $k > \frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{4} < k < 0$

(E) $0 < k < \frac{1}{4}$

9) Um restaurante a quilo vende 200 quilos de comida por dia, a 40 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada aumento de um real no preço do quilo, o restaurante perde 8 clientes por dia, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida, em reais, para que o restaurante tenha a maior receita possível por dia?
(A) 52
(B) 51
(C) 46
(D) 45
(E) 42

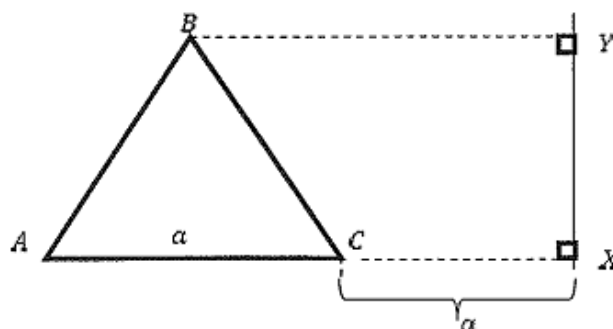
10) Sabendo que z é o número complexo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qual o menor inteiro positivo n, para o qual o produto $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot \ldots \cdot z^n$ é um real positivo?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

11) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador. De quantos modos diferentes podemos distribuí-las entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?
(A) 288
(B) 1260
(C) 60800
(D) 80760
(E) 120960

12) Considere as matrizes $R=\begin{bmatrix} 4 & (16)^y & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix}$; $S=\begin{bmatrix} 1 & (4)^{(2y-1)} & 2^{-1} \\ 3^x & b & 1 \end{bmatrix}$ e $T=\begin{bmatrix} b & (2)^{(2y-1)}-10 & c \\ 27 & 13 & -6 \end{bmatrix}$. A soma dos quadrados das constantes reais x, y, a, b, c que satisfazem à equação matricial $R-6S=T$ é
(A) 23
(B) 26
(C) 29
(D) 32
(E) 40

13) Sabendo-se que f é uma função real de variável real, tal que a derivada segunda de f em x é $f''(x)=\cos^2 x+1$ e que $f(0)=\frac{7}{8}$ e $f'(0)=2$, o valor de $f(\pi)$ é
(A) $2\pi+\frac{11}{8}$
(B) $\pi^2+\pi+\frac{5}{8}$
(C) $2\pi^2+5$
(D) $\frac{3\pi^2}{4}+2\pi+\frac{7}{8}$
(E) $3\pi^2+\pi+\frac{5}{8}$

14) A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é

(A) $9\pi a^2$
(B) $9\sqrt{2}\pi a^2$
(C) $9\sqrt{3}\pi a^2$
(D) $6\sqrt{3}\pi a^2$
(E) $6\sqrt{2}\pi a^2$

15) Um recipiente cúbico de aresta 4 cm está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura de 3 cm. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. A tangente do ângulo α é
(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{1}{2}$
(E) 1

16) O valor do produto $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$ é
(A) $-\frac{1}{8}$
(B) $-\frac{1}{4}$
(C) -1
(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

17) Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é
(A) 0,1
(B) 0,2
(C) 0,3
(D) 0,6

(E) 0,8

18) Quantas unidades de área possui a região limitada pela curva de equação $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ e pelas retas $2y + x - 3 = 0$, $2y - x + 3 = 0$ e $x = 2$?

(A) $\pi + \frac{1}{2}$

(B) $\pi + \frac{3}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2} + 1$

(D) $\pi + 3$

(E) $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}$

19) Sejam $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$ as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ que passam pelo ponto $P(0,0)$. O valor de $(m_1^2 + m_2^2)$ é

(A) 1

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

(E) $\frac{5}{2}$

20) Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a 20 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de 12 cm desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é

(A) $6.000\pi^2$

(B) $5.000\pi^2$

(C) $4.000\pi^2$

(D) $3.000\pi^2$

(E) $2.000\pi^2$

21) Um observador, de altura desprezível, situado a 25 m de um prédio, observa-o sob um certo ângulo de elevação. Afastando-se mais 50 m em linha reta, nota que o ângulo de visualização passa a ser a metade do anterior. Podemos afirmar que a altura, em metros, do prédio é

(A) $15\sqrt{2}$

(B) $15\sqrt{3}$

(C) $15\sqrt{5}$

(D) $25\sqrt{3}$

(E) $25\sqrt{5}$

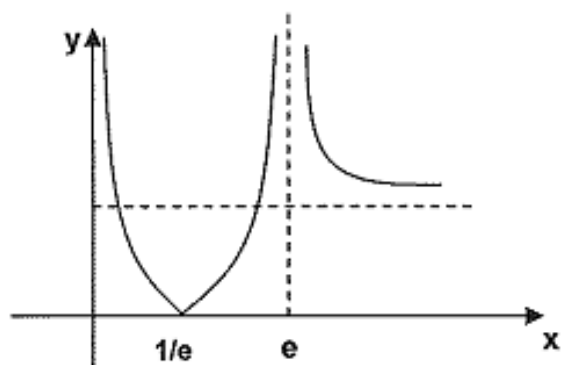
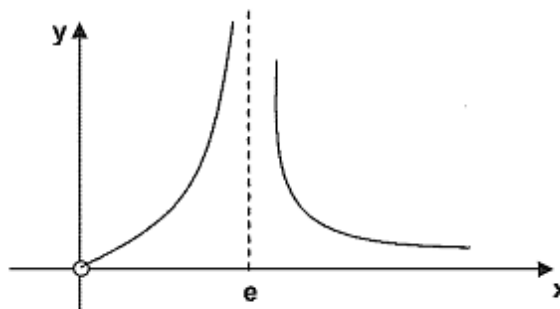
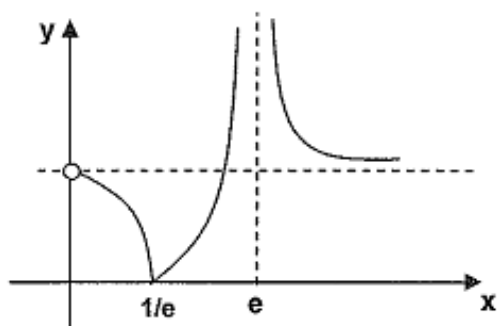
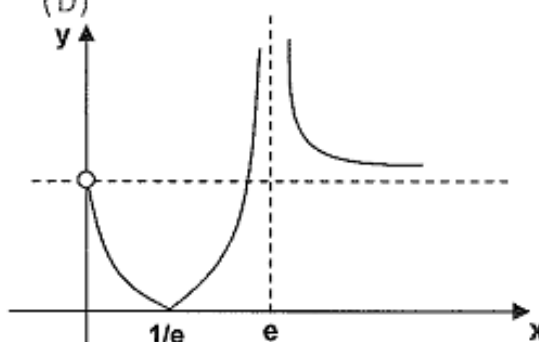
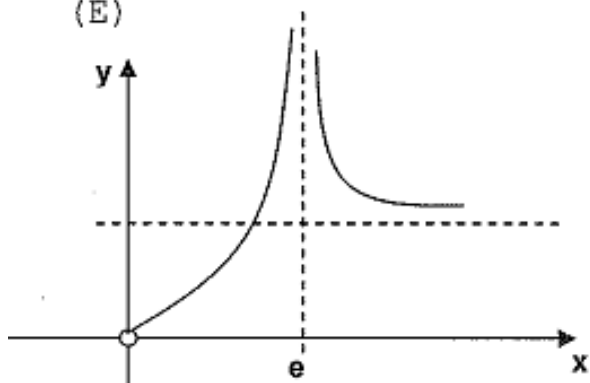
22) A equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3,3)$ e $(-3,3)$ é
(A) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$
(E) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

23) Uma bolinha de aço é lançada a partir da origem e segue uma trajetória retilínea até atingir o vértice de um anteparo parabólico representado pela função real de variável real $f(x) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)x^2 + 2\sqrt{3}x$. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória retilínea é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola. Qual é o ângulo de incidência (ângulo entre a trajetória e o eixo da parábola)?
(A) 30º
(B) 45º
(C) 60º
(D) 75º
(E) 90º

24) A soma das coordenadas do ponto $A \in \mathbb{R}^3$ simétrico ao ponto $B = (x, y, z) = (1, 4, 2)$ em relação ao plano π de equação $x - y + z - 2 = 0$ é
(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 9
(E) 10

25) Para lotar o Maracanã na final do campeonato Sul Americano, planejou-se inicialmente distribuir os 60.000 ingressos em três grupos da seguinte forma: 30% seriam vendidos para a torcida organizada local; 10% seriam vendidos para a torcida organizada do time rival e os restantes para espectadores não filiados às torcidas. Posteriormente, por motivos de segurança, os organizadores resolveram que 9.000 destes ingressos não seriam mais postos à venda, cancelando-se então 3.000 ingressos destinados a cada um dos três grupos. Qual foi aproximadamente o percentual de ingressos destinados a espectadores não filiados às torcidas após o cancelamento dos 9.000 ingressos?
(A) 64,7%
(B) 60%
(C) 59%
(D) 58,7%
(E) 57,2%

26) O gráfico que melhor representa a função real de variável real $f(x) = \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right|$ é

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

27) Qual a quantidade de números inteiros de 4 algarismos distintos, sendo dois algarismos pares e dois ímpares que podemos formar, usando os algarismos de 1 a 9?
(A) 2400
(B) 2000
(C) 1840
(D) 1440
(E) 1200

28) Considere as funções reais $f(x)=\frac{x}{2}-\ln x$ e $g(x)=\frac{x}{2}-(\ln x)^2$ onde ln x expressa o logaritmo de x na base neperiana e $(e\cong 2,7)$. Se P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, podemos afirmar que o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é

(A) $\frac{e+1}{2(e-3)}$
(B) $e+1$
(C) $\frac{e-1}{2(e+1)}$
(D) $2e+1$
(E) $\frac{e-3}{2(e-1)}$

29) Se $\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z, então o número de soluções da equação $z^2=\overline{z}$ é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

30) Considere a função real de variável real $y=f(x)$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, cujo gráfico contém o ponto $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$. Se $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{sen} x\cdot\cos x$, então $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é igual a

(A) $-\sqrt{3}+\frac{1}{8}$
(B) $\frac{9}{8}$
(C) $\frac{7}{8}$
(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}$
(E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{4}$

31) O quinto termo da progressão aritmética $3-x;\ -x;\ \sqrt{9-x};\ \ldots,\ x\in\mathbb{R}$, é
(A) 7
(B) 10
(C) -2
(D) $-\sqrt{14}$
(E) -18

32) Após acionado o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)$, onde Q_0 é a capacidade limite de carga e t é medido em segundos. Qual o tempo, em segundos, para recarregar o capacitor de 90% da sua capacidade limite?

(A) ln 10

(B) $\ln(10)^2$

(C) $\sqrt{\ln 10}$

(D) $\sqrt{(\ln 10)^{-1}}$

(E) $\sqrt{\ln(10)^2}$

33) Há 10 postos de gasolina em uma cidade. Desses 10, exatamente dois vendem gasolina adulterada. Foram sorteados aleatoriamente dois desses 10 postos para serem fiscalizados. Qual é a probabilidade de que os dois postos infratores sejam sorteados?

(A) $\frac{1}{45}$

(B) $\frac{1}{90}$

(C) $\frac{1}{15}$

(D) $\frac{2}{45}$

(E) $\frac{1}{30}$

34) Desenha-se no plano complexo o triângulo T com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos z_1, z_2, z_3, que são raízes cúbicas da unidade. Desenha-se o triângulo S, com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos w_1, w_2, w_3, que são raízes cúbicas de $24\sqrt{3}$. Se A é a área de T e B é a área de S, então

(A) $B = 12A$

(B) $B = 18A$

(C) $B = 24A$

(D) $B = 36A$

(E) $B = 42A$

35) A concentração de um certo remédio no sangue, t horas após sua administração, é dada pela fórmula $y(t) = \frac{10t}{(t+1)^2}$, $t \geq 0$. Em qual dos intervalos abaixo a função $y(t)$ é crescente?

(A) $t \geq 0$

(B) $t > 10$

(C) $t > 1$

(D) $0 \leq t < 1$

(E) $\frac{1}{2} < t < 10$

36) Sabendo que a é uma constante real e que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e$ então o valor da constante a é

(A) $\frac{4}{3}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{3}$
(E) $\frac{3}{4}$

37) Seja π um dos planos gerados pelos vetores $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Considere $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, um vetor unitário do plano π e na direção da reta bissetriz entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. O valor de $2a^2 + b^2 + c^2$ é

(A) $\frac{10}{9}$
(B) $\frac{9}{8}$
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 1
(E) $\frac{11}{10}$

38) Considere a função real $f(x) = x^2 e^x$. A que intervalo pertence a abscissa do ponto de máximo local de f em $]-\infty, +\infty[$?

(A) $[-3, -1]$
(B) $[-1, 1[$
(C) $\left]0, \frac{1}{2}\right]$
(D) $]1, 2]$
(E) $]2, 4]$

39) O valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \text{sen}\, x} - \sqrt{1 - \text{sen}\, x}}{2x}$ é

(A) $-\infty$

(B) $\frac{1}{2}$
(C) 0
(D) 1
(E) 2

40) Seja $\vec{u}$ um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Se o produto escalar de $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ é igual a -1, podemos afirmar que a soma das componentes de $\vec{u}$ é
(A) 1
(B) $\frac{1}{2}$
(C) 0
(D) $-\frac{1}{2}$
(E) -1

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2013/2014

1) A soma das raízes reais distintas da equação $||x-2|-2|=2$ é igual a
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8

2) A equação $4x^2-y^2-32x+8y+52=0$, no plano xy, representa
(A) duas retas
(B) uma circunferência
(C) uma elipse
(D) uma hipérbole
(E) uma parábola

3) Considere f e g funções reais de variável real definidas por, $f(x)=\dfrac{1}{4x-1}$ e $g(x)=2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(f\circ g)(x)$?
(A) $\mathbb{R}$
(B) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ x\neq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$
(C) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\dfrac{1}{4}\right\}$
(D) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\dfrac{1}{4},\ x\neq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$
(E) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\dfrac{1}{4},\ x\neq-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

4) Considerando que a função $f(x)=\cos x$, $0\le x\le\pi$, é inversível, o valor de $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccos}\dfrac{2}{5}\right)$ é
(A) $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$
(B) $-\dfrac{4}{25}$
(C) $-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$
(D) $\dfrac{\sqrt{21}}{25}$
(E) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

5) Sabendo que a função real $f(x)=\begin{cases} 1+e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x^2+x-a}{x+2} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ é contínua em $x=0$, $x\in\mathbb{R}$, qual é o valor de $\dfrac{a}{b}$, onde $b=\dfrac{f^2(0)}{4}$?

(A) 8
(B) 2
(C) 1
(D) $-\dfrac{1}{4}$
(E) -8

6) Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y=-\sqrt{3-x^2-2x}$ e a reta $y=x-1$?

(A) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$
(B) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{4}$
(C) $3\pi+2$
(D) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$
(E) $\pi-2$

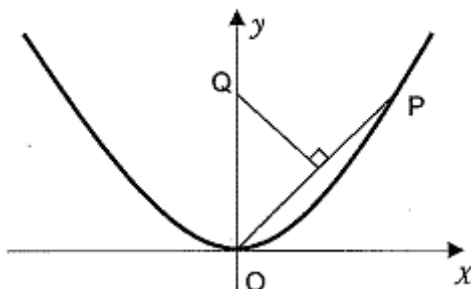
7) As equações simétricas da reta de interseção dos planos $2x-y-3=0$ e $3x+y+2z-1=0$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, são

(A) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{2-z}{5}$
(B) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{5}$
(C) $x=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{2-z}{4}$
(D) $x-1=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{z-2}{4}$
(E) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{5}$

8) Sejam $F(x)=x^3+ax+b$ e $G(x)=2x^2+2x-6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a+b)$ para que a divisão $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

(A) -2
(B) -1
(C) 0

(D) 1
(E) 2

9) A figura abaixo mostra um ponto $P \neq O$, O origem, sobre a parábola $y = x^2$ e o ponto Q, interseção da mediatriz do segmento OP com o eixo y. A medida que P tende à origem ao longo da parábola, o ponto Q se aproxima do ponto

(A) $(0,0)$
(B) $\left(0,\frac{1}{8}\right)$
(C) $\left(0,\frac{1}{6}\right)$
(D) $\left(0,\frac{1}{4}\right)$
(E) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

10) Sabendo que $b = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\dots\right)$, então o valor de $\log_2|b|$ é
(A) 1
(B) 0
(C) -1
(D) -2
(E) 3

11) Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

12) Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
(E) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

13) Qual é o domínio da função real de variável real, definida por $f(x)=\ln(x^2-3x+2)+\sqrt{e^{2x-1}-1}$?
(A) $[1,2[$
(B) $\left[\frac{1}{2},2\right[\cup]3,+\infty[$
(C) $]2,+\infty[$
(D) $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]2,+\infty[$
(E) $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

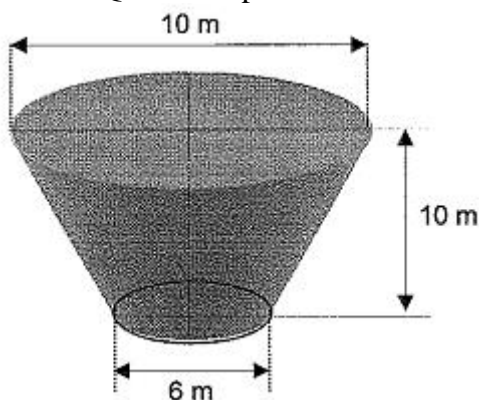
14) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^7$ é
(A) 30
(B) 90
(C) 120
(D) 270
(E) 560

15) Sejam $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ e B^t a transposta de B. O produto da matriz A pela matriz B^t é
(A) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 10 \\ -8 & 6 & 0 \\ 21 & -21 & -6 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?

(A) $\frac{40}{3}10^2\pi$

(B) $\frac{19}{2}10^5\pi$

(C) $\frac{49}{3}10\pi$

(D) $\frac{49}{3}10^4\pi$

(E) $\frac{19}{3}10^3\pi$

17) Qual o menor valor de n, n inteiro maior que zero, para que $(1+i)^n$ seja um número real?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

18) Os números complexos z e w são representados no plano xy pelos pontos A e B, respectivamente. Se $z = 2w + 5wi$, $w \neq 0$, e sabendo-se que a soma dos quadrados das coordenadas do ponto B é 25, então o produto escalar de $\overrightarrow{OA}$ por $\overrightarrow{OB}$, onde O é a origem, é

(A) $\frac{25}{2}$

(B) $\frac{25}{3}$
(C) $\frac{25}{4}$
(D) 50
(E) $\frac{50}{3}$

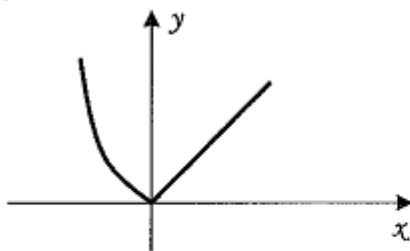
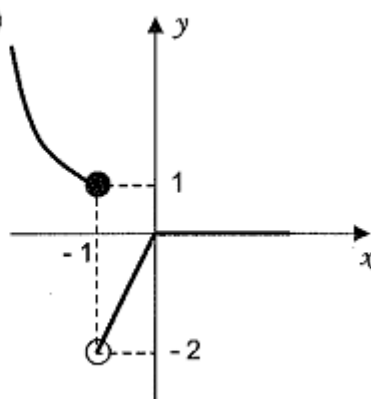
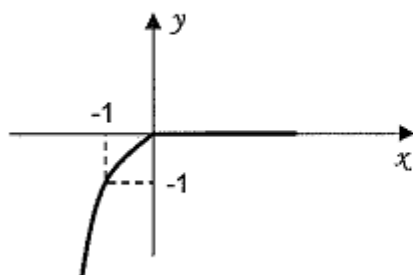
19) Uma loja está fazendo uma promoção na venda de bolas: "Compre x bolas e ganhe x% de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 bolas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Julia comprou 41 bolas e poderia ter comprado mais bolas e gasto a mesma quantia. Quantas bolas a mais Julia poderia ter comprado?
(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 18
(E) 24

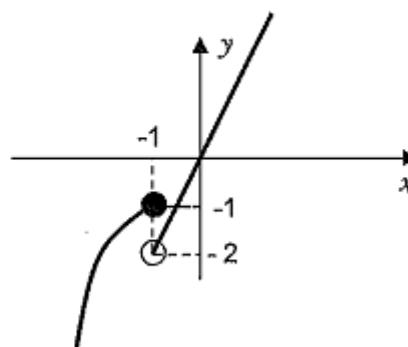
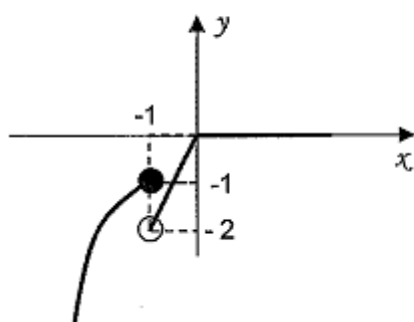
20) De um curso preparatório de Matemática para o concurso público de ingresso à Marinha participaram menos de 150 pessoas. Destas, o número de mulheres estava para o de homens na razão de 2 para 5 respectivamente. Considerando que a quantidade de participantes foi a maior possível, de quantas unidades o número de homens excedia o de mulheres?
(A) 50
(B) 55
(C) 57
(D) 60
(E) 63

21) Considere $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{w}$ vetores no $\mathbb{R}^3$ e θ o ângulo entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$. Qual é o valor da expressão $\left(\text{tg}\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{2} \right)$?
(A) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$
(B) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$
(C) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
(D) $\frac{2 + \sqrt{3}}{6}$
(E) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

22) A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y-3x=0$ intercepta o gráfico da função $f(x)=|x|\dfrac{x^2-1}{x}$ nos pontos P e Q. Qual é a distância entre P e Q?
(A) $2\sqrt{15}$
(B) $2\sqrt{13}$
(C) $2\sqrt{7}$
(D) $\sqrt{7}$
(E) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

23) O limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}2x-\cos 2x-1}{\cos x-\operatorname{sen}x}$ é igual a
(A) $\sqrt{2}$
(B) $-\sqrt{2}$
(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(E) 0

24) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-|x+1||x|}{x+1}+x & \text{se } x>-1\\ x|x| & \text{se } x\le -1\end{cases}$ é

(A)
(B)

(C)

(D)

(E)

25) Considere f uma função real de variável real tal que:
(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$
(2) $f(1)=3$
(3) $f(\sqrt{2})=2$
Então $f(2+3\sqrt{2})$ é igual a
(A) 108
(B) 72
(C) 54
(D) 36
(E) 12

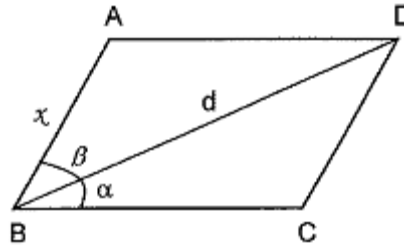
26) Em um certo país, o imposto de renda anual é taxado da maneira a seguir:
1°) se a renda bruta anual é menor que R$ 10.000,00 não é taxado;
2°) se a renda bruta anual é maior ou igual a R$ 10.000,00 e menor que R$ 20.000,00 é taxado em 10%;
3°) se a renda bruta anual é maior ou igual a R$ 20.000,00 é taxado em 20%.
A pessoa que ganhou no ano R$ 17.370,00 após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é
(A) R$ 17.370,40
(B) R$ 15.410,40
(C) R$ 3.840,50
(D) R$ 2.412,50

(E) R$ 1.206,60

27) A figura abaixo mostra um paralelogramo ABCD. Se d representa o comprimento da diagonal BD e α e β são ângulos conhecidos (ver figura), podemos afirmar que o comprimento x do lado AB é igual a

(A) $d\cos\beta$

(B) $\frac{d\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(\alpha+\beta\right)}$

(C) $d\,\text{sen}\,\beta$

(D) $\frac{d\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}$

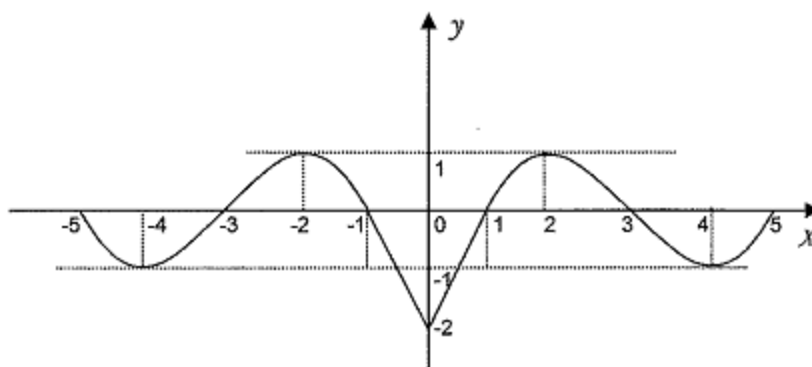
(E) $d\cos\left(180°-\left(\alpha+\beta\right)\right)$

28) Um aspirante da Escola Naval tem, em uma prateleira de sua estante, 2 livros de Cálculo, 3 livros de História e 4 livros de Eletricidade. De quantas maneiras ele pode dispor estes livros na prateleira de forma que os livros de cada disciplina estejam sempre juntos?
(A) 1728
(B) 1280
(C) 960
(D) 864
(E) 288

29) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\frac{1}{10}$ da superfície da Terra. A que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a 6400 km
(A) 1200 km
(B) 1280 km
(C) 1600 km
(D) 3200 km
(E) 4200 km

30) Sabendo-se que $i\sqrt{3}$ é uma das raízes da equação $x^4+x^3+2x^2+3x-3=0$, a soma de todas as raízes desta equação é
(A) $-2i\sqrt{3}$
(B) $4i\sqrt{3}$
(C) 0
(D) -1

(E) -2

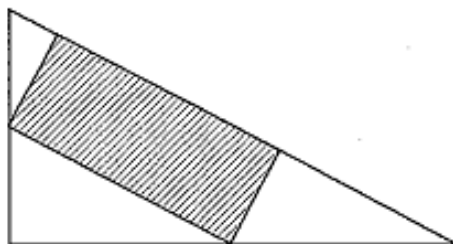
31) Considere a função real $y = f(x)$, definida para $-5 \le x \le 5$, representada graficamente abaixo. Supondo $a \ge 0$ uma constante real, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 9)$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em exatamente 4 pontos distintos?

(A) $1 < a < \frac{10}{9}$

(B) $\frac{2}{9} < a < 1$

(C) $0 < a < \frac{2}{9}$

(D) $\frac{10}{9} < a < 3$

(E) $a > 3$

32) Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 30 cm, 40 cm e 50 cm. Deseja-se a partir dele, recortar um espelho retangular, com a maior área possível, conforme figura abaixo. Então as dimensões do espelho são

(A) 25 cm e 12 cm
(B) 20 cm e 15 cm
(C) 10 cm e 30 cm
(D) 12,5 cm e 24 cm
(E) $10\sqrt{3}$ cm e $10\sqrt{3}$ cm

33) Para que valores de m vale a igualdade $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{m-2}$, $x \in \mathbb{R}$?

(A) $m < 2$

(B) $m \le \frac{3}{2}$

(C) $m \le \frac{3}{2}$ ou $m \ge 2$

(D) $m \le \frac{5}{2}$ e $m \ne 2$

(E) $m \le \frac{7}{2}$ e $m \ne 2$

34) Uma caixa contém 4 pistolas e 4 fuzis, sendo uma pistola e 2 fuzis defeituosos. Duas armas são retiradas da caixa sem reposição. A probabilidade de pelo menos uma arma ser defeituosa ou ser pistola é igual a

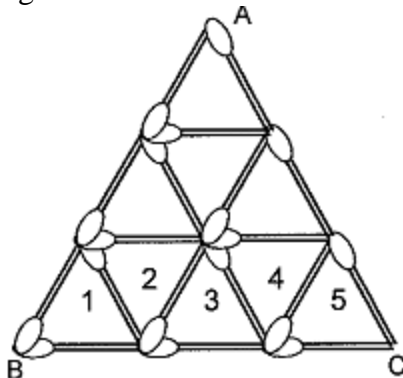
(A) $\frac{27}{28}$

(B) $\frac{13}{14}$

(C) $\frac{6}{7}$

(D) $\frac{11}{14}$

(E) $\frac{5}{7}$

35) Um grande triângulo equilátero será construído com palitos de fósforo, a partir de pequenos triângulos equiláteros congruentes e dispostos em linhas. Por exemplo, a figura abaixo descreve um triângulo equilátero (ABC) construído com três linhas de pequenos triângulos equiláteros congruentes (a linha da base do triângulo ABC possui 5 pequenos triângulos equiláteros congruentes). Conforme o processo descrito, para que seja construído um triângulo grande com linha de base contendo 201 pequenos triângulos equiláteros congruentes são necessários um total de palitos igual a

(A) 15453
(B) 14553
(C) 13453
(D) 12553
(E) 11453

36) Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo de aresta L?

(A) $\text{arcsen}\,\frac{1}{4}$

(B) $\arccos\frac{1}{4}$

(C) $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$

(D) $\arccos\frac{1}{3}$

(E) $\text{arctg}\,\frac{1}{4}$

37) A soma das soluções da equação trigonométrica $\cos 2x + 3\cos x = -2$, no intervalo $[0, 2\pi]$ é
(A) π
(B) 2π
(C) 3π
(D) $\frac{5\pi}{3}$
(E) $\frac{10\pi}{3}$

38) Um quadrado ABCD, de lado 4 cm, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos AP e CQ, perpendiculares a α, medindo respectivamente, 3 cm e 7 cm. A distância PQ tem medida, em cm, igual a
(A) $2\sqrt{2}$
(B) $2\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $3\sqrt{3}$
(E) $4\sqrt{3}$

39) Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.
( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
( ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.
( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.
( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.
Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (V) (F) (V)
(B) (V) (F) (V) (V) (F)
(C) (V) (V) (F) (V) (V)
(D) (F) (V) (V) (V) (V)
(E) (V) (V) (V) (V) (V)

40) Seja $\overline{AB}$ o lado de um decágono regular inscrito em um círculo de raio R e centro O. Considere o ponto C sobre a reta que passa por A e B tal que $\overline{AC} = R$. O lado $\overline{OC}$ do triângulo de vértices O, A e C mede,

(A) $R\sqrt{2-\sqrt{5}}$

(B) $\frac{R}{2}\sqrt{5-\sqrt{2}}$

(C) $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

(D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$

(E) $\frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$

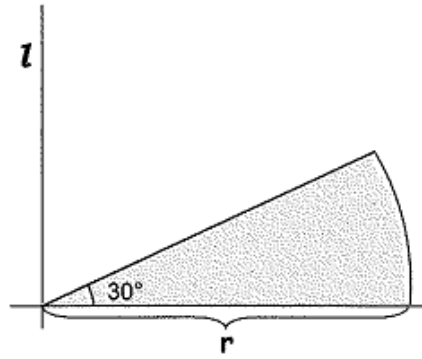
PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2012/2013

1) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$. É verdade afirmar que
(A) f tem um ponto de mínimo em $]-\infty, 0[$.
(B) f tem um ponto de inflexão em $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
(C) f tem um ponto de máximo em $[0, +\infty[$.
(D) f é crescente em $[0,1]$.
(E) f é decrescente em $[-1, 2]$.

2) Os números reais a, b, c, d, f, g, h constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Se
$e^{\det A} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$, onde A é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$ e $h = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, então o valor de $(b - 2g)$

vale
(A) $-\frac{1}{3}$
(B) $-\frac{21}{16}$
(C) $-\frac{49}{48}$
(D) $\frac{15}{16}$
(E) $\frac{31}{48}$

3) Considere a função $f(x) = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + 2 \operatorname{sen} x$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. O resultado de
$\int \left[(f'(x))^2 + 2 - 2\cos 2x\right] dx$ é
(A) $\operatorname{tg} x + 8x + 2\operatorname{sen} 2x + C$
(B) $\sec x + 6x + C$
(C) $\sec x - 2x - \operatorname{sen} 2x + C$
(D) $\operatorname{tg} x + 8x + C$
(E) $\sec x + 6x - \operatorname{sen} 2x + C$

4) Considere dois cones circulares retos de altura H e raio da base 1 cm, de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo *l*. O valor de H é, em cm,

(A) $\left(2+\sqrt{3}\right)r^3$
(B) $2\sqrt{3}\,r^3$
(C) $\frac{4}{3}r^3$
(D) $2r^3$
(E) $4r^3$

5) Seja A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x)=\ln\left(2+x+3|x|-|x+1|\right)$ e a imagem da função $g(x)=-2+\frac{\sqrt{2\left(x+|x-2|\right)}}{2}$.
Pode-se afirmar que
(A) $A=B$
(B) $A\cap B=\varnothing$
(C) $A\supset B$
(D) $A\cap B=\mathbb{R}_+$
(E) $A-B=\mathbb{R}_-$

6) Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$ cm, então seu volume vale
(A) $45\cdot10^{-3}\pi\,dm^3$
(B) $0,45\cdot10^{-3}\pi\,dm^3$
(C) $60\cdot10^{-3}\pi\,dm^3$
(D) $0,15\cdot10^{3}\pi\,dm^3$
(E) $60\cdot10^{3}\pi\,dm^3$

7) Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale
(A) $\frac{\left(1+2\sqrt{3}\right)a}{3}$

(B) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$
(C) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$
(D) $(1+2\sqrt{3})a$
(E) $(3+2\sqrt{3})a$

8) A soma dos quadrados das raízes da equação $|\text{sen}\, x| = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$, quando $0 < x < 2\pi$ vale
(A) $\frac{49}{36}\pi^2$
(B) $\frac{49}{9}\pi^2$
(C) $\frac{7}{3}\pi^2$
(D) $\frac{14}{9}\pi^2$
(E) $\frac{49}{6}\pi^2$

9) Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.
( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
( ) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então eles são paralelos $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
( ) Se $\vec{u} = (3, 0, 4)$ e $\vec{v} = (2, \sqrt{8}, 2)$, então $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^3$.
Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (F) (V) (V)
(B) (F) (V) (F) (F) (V)
(C) (V) (F) (V) (V)(F)
(D) (F) (F) (F) (V) (F)
(E) (V) (V) (V) (F) (F)

10) Um ponto $P(x, y)$ move-se ao longo da curva plana de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, com $y > 0$. Se a abscissa x está variando a uma velocidade $\frac{dx}{dt} = \text{sen}\, 4t$, pode-se afirmar que a aceleração da ordenada y tem por expressão

(A) $\dfrac{(1+x^2)\,\text{sen}^2\,4t+4x^3\cos 4t}{8y^3}$

(B) $\dfrac{x^2\,\text{sen}\,4t+4x\cos^2 4t}{16y^3}$

(C) $\dfrac{-\text{sen}^2\,4t-16xy^2\cos 4t}{16y^3}$

(D) $\dfrac{x^2\,\text{sen}\,4t-4x\cos^2 4t}{8y^3}$

(E) $\dfrac{-\text{sen}^2\,4t+16xy^2\cos 4t}{16y^3}$

11) Considere π o plano que contém o centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,

(A) $\dfrac{50}{3}$

(B) $\dfrac{50}{9}$

(C) $\dfrac{100}{3}$

(D) $\dfrac{200}{9}$

(E) $\dfrac{100}{9}$

12) Considere f e f ' funções reais de variável real, deriváveis, onde $f(1)=f'(1)=1$. Qual o valor da derivada da função $h(x)=\sqrt{f(1+\text{sen}\,2x)}$ para $x=0$?

(A) -1

(B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) 0

(D) $-\dfrac{1}{3}$

(E) 1

13) Considere a sequência $(a,b,2)$ uma progressão aritmética e a sequência $(b,a,2)$ uma progressão geométrica não constante, $a,b\in\mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a,b) e pelo vértice da curva $y^2-2y+x+3=0$ é

(A) $6y - x - 4 = 0$
(B) $2x - 4y - 1 = 0$
(C) $2x - 4y + 1 = 0$
(D) $x + 2y = 0$
(E) $x - 2y = 0$

14) O valor de $\int_0^{\pi/2} \left(e^{2x} - \cos x\right) dx$ é

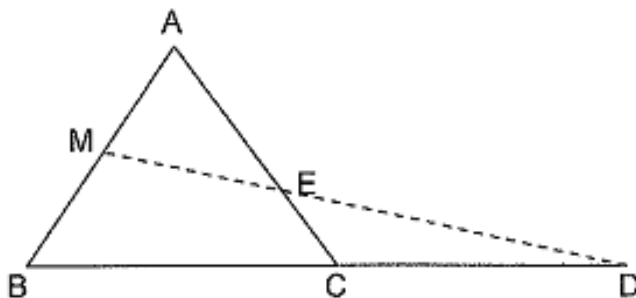
(A) $\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$
(B) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2}$
(C) $\frac{e^{\pi}}{2} + \frac{3}{2}$
(D) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{3}{2}$
(E) $\frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2}$

15) Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cossec}^2 \pi x + \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?

(A) $\sqrt{3}$
(B) -1
(C) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$
(D) 2
(E) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

16) Considere como espaço amostral (Ω), o círculo no plano xy de centro na origem e raio igual a 2. Qual a probabilidade do evento $A = \{(x, y) \in \Omega \,/\, |x| + |y| < 1\}$?

(A) $\frac{2}{\pi}$
(B) 4π
(C) $\frac{1}{\pi}$
(D) $\frac{1}{2\pi}$
(E) π

17) O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do triângulo MAE vale

(A) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$

(B) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$

(C) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$

(E) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

18) Seja p a soma dos módulos das raízes da equação $x^3 + 8 = 0$ e q o módulo do número complexo Z, tal que $Z \cdot \overline{Z} = 108$, onde $\overline{Z}$ é o conjugado de Z. Uma representação trigonométrica do número complexo $p + qi$ é

(A) $12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

(B) $20\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

(C) $12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

(D) $20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

(E) $10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

19) Seja m a menor raiz inteira da equação $\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]! = 1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt{y} - z^3\right)^{12m}$ é

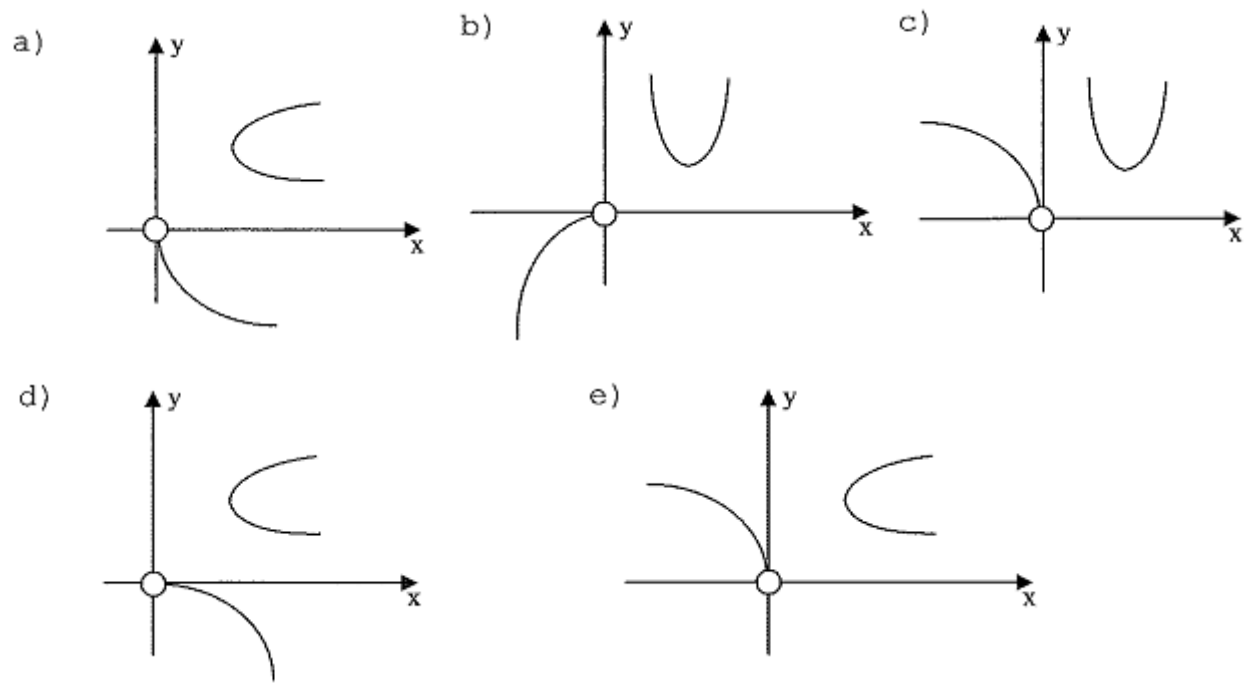
(A) $\frac{12!}{6!6!} y^{18} z^{\frac{3}{2}}$

(B) $\frac{-12!}{6!6!}y^3z^{18}$

(C) $\frac{30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$

(D) $\frac{-30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$

(E) $\frac{-12!}{6!6!}y^3z^{18}$

20) A figura que melhor representa o gráfico da função $x = |y|e^{\frac{1}{y}}$ é

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2011/2012

1) Sejam:

i) r uma reta que passa pelo ponto $(\sqrt{3},-1)$.

ii) A e B respectivamente os pontos em que r corta os eixos x e y.

iii) C o ponto simétrico de B em relação à origem.

Se o triângulo ABC é equilátero, a equação da circunferência de centro A e raio igual à distância entre A e C é

a) $(x-\sqrt{3})^2+y^2=12$

b) $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=16$

c) $(x-\sqrt{3})^2+y^2=16$

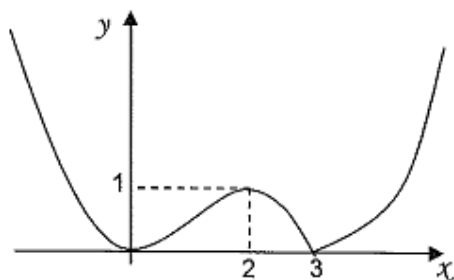
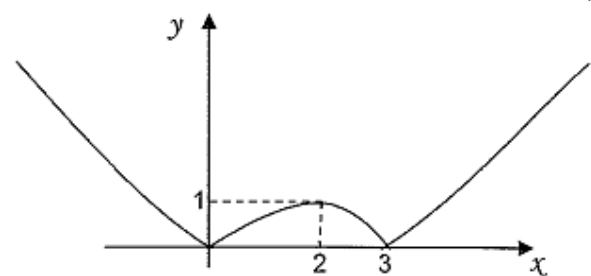
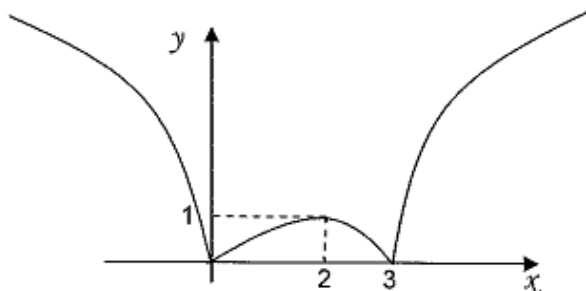
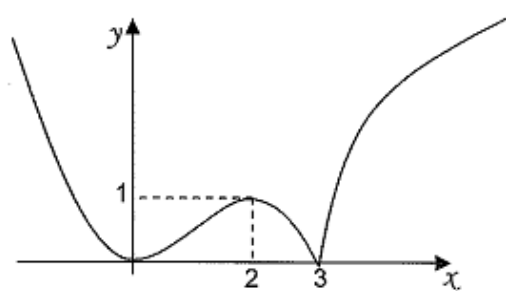
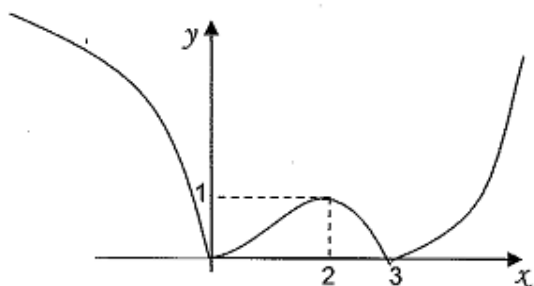
d) $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=12$

e) $(x-3\sqrt{3})^2+y^2=12$

2) Calculando-se $\lim_{x\to 0^+}(\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x}$, obtém-se

a) ∞
b) 0
c) e
d) -1
e) 1

3) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x)=\frac{1}{4}|x^3-3x^2|$ é

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

4) Qual o valor de $\int (\text{cossec}\, x \cdot \sec x)^{-2}\, dx$?

a) $\frac{1}{32}(4x - \text{sen}\, 4x) + c$

b) $\frac{\text{sen}^5 x}{5} - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c$

c) $\frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x}{9} + c$

d) $\frac{1}{16}(4x - \text{sen}\, 4x) + c$

e) $\frac{1}{16}(4x + \text{sen}\, 4x) + c$

5) Em que ponto da curva $y^2 = 2x^3$ a reta tangente é perpendicular à reta de equação $4x - 3y + 2 = 0$?

a) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{16}\right)$

c) $\left(1, -\sqrt{2}\right)$

d) $(2, -4)$

e) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

6) Considere S, a soma das raízes da equação trigonométrica $4\,\text{sen}^3 x - 5\,\text{sen}\,x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual o valor de $\text{tg}\,S + \text{cossec}\,2S$?

a) 2
b) 1
c) 0
d) -1
e) -2

7) Considere x, y, z e a números reais positivos, tais que seus logaritmos numa dada base a, são números primos satisfazendo as igualdades $\begin{cases} \log_a(axy) = 50 \\ \log_a \sqrt{\dfrac{x}{z}} = 22 \end{cases}$. Podemos afirmar que $\sqrt{\log_a(xyz) + 12}$ vale:

a) 8
b) $\sqrt{56}$
c) $\sqrt{58}$
d) 11
e) 12

8) Sendo x e y números reais, a soma de todos os valores de x e de y, que satisfazem ao sistema $\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{y^2} \\ y^x = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$, vale

a) $\frac{36}{5}$
b) $\frac{9}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{25}{4}$
e) $-\frac{1}{2}$

9) Considere um quadrado de vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. Suponha que a probabilidade de uma região A, contida no quadrado, seja a área desta região. Considere a região $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq \frac{2}{3} \text{ ou } y \geq \frac{2}{3}\right\}$. A probabilidade do evento A ocorrer é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{5}{9}$
e) $\frac{7}{9}$

10) Sejam f e g funções cujo domínio é o conjunto $D=\{n\in\mathbb{N}/n\geq 3\}$ onde n representa o número de lados de um polígono regular. As funções f e g associam respectivamente para cada $n\in D$, as medidas dos ângulos interno e externo do mesmo polígono. É correto afirmar que:
a) $f(n)<g(n)$ se e somente se $(n-1)!=n!-(n-1)!$.
b) Se $f(n)=g(n)$ então o polígono considerado é um triângulo equilátero.
c) $\log_2\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)=1-\log_2(n-2)$ para todo n ou $g(10)=2f(10)$.
d) f é injetora e $\text{sen}\left(f(n)+g(n)\right)=0$.
e) $(gof)(n)$ está sempre definida.

11) O aspirante João Paulo possui, em mãos, R\$ 36,00 em moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos. Aumentando-se em 30% a quantidade de moedas de 10, 25 e 50 centavos, o aspirante passou a ter R\$ 46,65. Quando o aumento da quantidade de moedas de 5, 10 e 25 centavos foi de 50%, o aspirante passou a ter R\$ 44,00 em mãos. Considerando o exposto acima, a quantidade mínima de moedas de 50 centavos que o aspirante passou a ter em mãos é
a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sejam x, y, z e w as quantidades originais de moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos, respectivamente.

$$\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\5x+10\cdot1,3y+25\cdot1,3z+50\cdot1,3w=4665\\5\cdot1,5x+10\cdot1,5y+25\cdot1,5z+50w=4400\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\5x+13y+32,5z+65w=4665\quad(L2-1,3L1)\\7,5x+15y+37,5z+50w=4400\quad(L3-1,5L1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\-1,5x=-15\Leftrightarrow x=10\\-25w=-1000\Leftrightarrow w=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+5z=310\\x=10\\w=40\end{cases}$$

Logo, a quantidade mínima de moedas de 50 centavos que o aspirante passou a ter em mãos é 40.

12) A matriz quadrada A, de ordem 3, cujos elementos a_{ij} são números reais, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i! - j! & \text{se } i > j \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{j}\right) & \text{se } i \le j \end{cases}$. É correto afirmar que:

a) A não é inversível.

b) O determinante da matriz A^2 vale 8.

c) O sistema linear homogêneo $AX = 0$, onde $X = (x_{ij})_{3\times1}$ e $0 = (o_{ij})_{3\times1}$ é possível e indeterminado.

d) $\log_2\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i2}\right) + \sum_{j=1}^{3} \log_2(a_{j3}) = -1$.

e) Nenhuma das linhas de A^T forma uma P.A. e nenhuma das colunas de A forma uma P.G..

13) A taxa de depreciação $\dfrac{dV}{dt}$ de determinada máquina é inversamente proporcional ao quadrado de $t+1$, onde V é o valor, em reais, da máquina t anos depois de ter sido comprada. Se a máquina foi comprada por R\$ 500.000,00 e seu valor decresceu R\$ 100.000,00 no primeiro ano, qual o valor estimado da máquina após 4 anos?

a) R\$ 350.000,00

b) R\$ 340.000,00

c) R\$ 260.000,00

d) R\$ 250.000,00

e) R\$ 140.000,00

14) Ao meio dia, o navio NE-Brasil encontra-se a 100 km a leste do navio Aeródromo São Paulo. O NE-Brasil navega para oeste com a velocidade de 12 km/h e o São Paulo para o sul a 10 km/h. Em que instante, aproximadamente, os navios estarão mais próximos um do outro?

a) 5,3 h

b) 5,1 h

c) 4,9 h

d) 4,4 h

e) 4,1 h

15) Sendo $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $z = \{i^{8n-5} + i^{4n-8}\}^3 + 2i$ e $P(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 11$ um polinômio sobre o conjunto dos números complexos, então $P(z)$ vale

a) $-167 + 4i$

b) $41 + 0i$

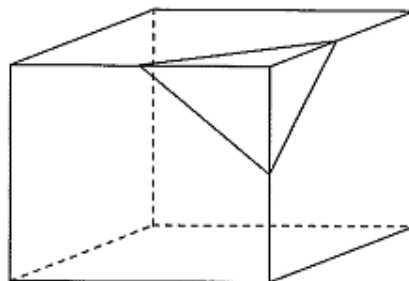
c) $-167 - 4i$

d) $41 + 2i$

e) $0 + 4i$

16) As bases de um tronco de pirâmide triangular regular têm de perímetro, respectivamente, $54\sqrt{3}\text{ m}$ e $90\sqrt{3}\text{ m}$. Se θ é o ângulo formado pela base maior com cada uma das faces laterais e a altura do tronco medindo $6\sqrt{3}\text{ m}$, então $\text{tg}^2\,\theta$ vale

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) 1
d) $\sqrt{3}$
e) 3

17) Considere um cubo maciço de aresta $a = 2\text{ cm}$. Em cada canto do cubo, corte um tetraedro, de modo que este tenha um vértice no respectivo vértice do cubo e os outros vértices situados nos pontos médios das arestas adjacentes, conforme ilustra a figura abaixo. A soma dos volumes desses tetraedros é equivalente ao volume de uma esfera, cuja área da superfície, em cm^2, mede

a) $4\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$
b) 4π
c) $4\sqrt[3]{\pi}$
d) $4\pi(\pi+1)$
e) $4\pi\sqrt[3]{\pi^2}$

18) Três números inteiros estão em P.G.. A soma destes números vale 13 e a soma dos seus quadrados vale 91. Chamando de n o termo do meio desta P.G., quantas comissões de n elementos, a Escola Naval pode formar com 28 professores do Centro Técnico Científico?
a) 2276
b) 3176
c) 3276
d) 19656
e) 19556

19) A área da região interior à curva $x^2 + y^2 - 6y - 25 = 0$ e exterior à região definida pelo sistema de inequações $\begin{cases} 3x + 5y - 15 \leq 0 \\ 2x + 5y - 10 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ vale

a) $\frac{72\pi-5}{2}$
b) $\frac{68\pi-15}{2}$
c) 68π
d) $\frac{72\pi-3}{2}$
e) $\frac{68\pi-5}{2}$

20) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5 \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$, $\|\vec{v}_1\| = 2$, $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{5}$, $\lambda = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$ e θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}_4 = (5, \lambda, -7)$ e $\vec{v}_5 = (1, -2, -3)$, então a área do paralelogramo formado, cujas arestas são representantes de $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$, vale
a) $4\sqrt{3}$
b) $\sqrt{6}$
c) $4\sqrt{6}$
d) $2\sqrt{3}$
e) 4

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2010/2011

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2009/2010

1) Ao escrevermos $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{Cx+D}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ onde a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le 2)$ e A, B, C e D são constantes reais, podemos afirmar que A^2+C^2 vale:
(A) $\frac{3}{8}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{8}$
(E) 0

2) Sabendo que a equação $2x=3\sec\theta$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, define implicitamente θ como uma função de x, considere a função f de variável real x onde $f(x)$ é o valor da expressão $\frac{5}{2}\text{cossec}\,\theta+\frac{2}{3}\text{sen}\,2\theta$ em termos de x. Qual o valor do produto $\left(x^2\sqrt{4x^2-9}\right)f(x)$?
(A) $5x^3-4x^2-9$
(B) $5x^3+4x^2-9$
(C) $-5x^3-4x^2+9$
(D) $5x^3-4x^2+9$
(E) $-5x^3+4x^2-9$

3) Sejam:
a) f uma função real de variável real definida por $f(x)=\text{arc tg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$, $x>1$ e
b) L a reta tangente ao gráfico da função $y=f^{-1}(x)$ no ponto $\left(0, f^{-1}(0)\right)$. Quanto mede, em unidades de área, a área do triângulo formado pela reta L e os eixos coordenados?
(A) $\frac{3}{2}$
(B) 3
(C) 1
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{4}{3}$

4) Considere

a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ vetores não nulos no $\mathbb{R}^3$

b) a matriz $\left[v_{ij}\right]$ que descreve o produto escalar de $\vec{v}_i$ por $\vec{v}_j$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$, e que é dada abaixo:

$$\left[v_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 & -1 & 2 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

c) o triângulo PQR onde $\overrightarrow{QP} = \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_3$.

Qual o volume do prisma, cuja base é o triângulo PQR e a altura h igual a duas unidades de comprimento?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(E) $\sqrt{5}$

5) Os gráficos das funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = \frac{5-x}{2}$ interceptam-se nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, $a \le b$. Considere os polígonos CAPBD onde C e D são as projeções ortogonais de A e B respectivamente sobre o eixo x e $P(x, y)$, $a \le x \le b$ um ponto qualquer do gráfico de f. Dentre esses polígonos, seja Δ, aquele que tem área máxima. Qual o valor da área de Δ, em unidades de área?

a) $\frac{530}{64}$

b) $\frac{505}{64}$

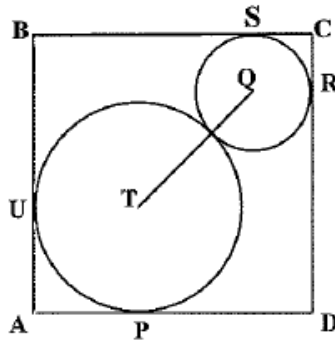
c) $\frac{445}{64}$

d) $\frac{125}{64}$

e) $\frac{95}{64}$

6) Considere a função real f de variável real e as seguintes proposições:
I) Se f é contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e tem um máximo local em $x = x_0$ então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$.
II) Se f é derivável em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e $f'(x_0) = 0$ então f tem um máximo local ou um mínimo local em $x = x_0$.
III) Se f tem derivada estritamente positiva em todo o seu domínio então f é crescente em todo o seu domínio.
IV) Se $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ é infinito então $\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = 1$.
V) Se f é derivável $\forall x \in \mathbb{R}$, então $\lim_{s \to 0} \frac{f(x) - f(x - 2s)}{2s} = 2f'(x)$.
Podemos afirmar que
(A) todas são falsas.
(B) todas são verdadeiras.
(C) apenas uma delas é verdadeira.
(D) apenas duas delas são verdadeiras.
(E) apenas uma delas é falsa.

7) Nas proposições abaixo, coloque, na coluna à esquerda (V) quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.
(   ) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.
(   ) Se duas retas r e s do $\mathbb{R}^3$ são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.
(   ) Duas retas concorrentes no $\mathbb{R}^3$ determinam um único plano.
(   ) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então os planos A e B são paralelos.
(   ) Se duas retas r e s no $\mathbb{R}^3$ são paralelas a um plano A então r e s são paralelas.
Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
a) F F V F F
b) V F V F F
c) V V V F F
d) F V V F V
e) F F V V V

8) As circunferências da figura abaixo possuem centro nos pontos T e Q, têm raios $3\,\text{cm}$ e $2\,\text{cm}$, respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do quadrado $ABCD$ nos pontos P, R, S e U.

Qual o valor da área da figura plana de vértices P, T, Q, R e D em cm^2?

(A) $\frac{7\sqrt{2}+18}{2\sqrt{2}}$

(B) $\frac{50\sqrt{2}+23}{8}$

(C) $\frac{15\sqrt{2}+2}{4}$

(D) $\frac{30\sqrt{2}+25}{4}$

(E) $\frac{50\sqrt{2}+49}{4}$

9) Considere um tanque na forma de um paralelepípedo com base retangular cuja altura mede $0,5\text{ m}$, contendo água até a metade de sua altura. O volume deste tanque coincide com o volume de um tronco de pirâmide regular de base hexagonal, com aresta lateral 5 cm e áreas das bases $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$, respectivamente. Um objeto, ao ser imerso completamente no tanque faz o nível da água subir $0,05\text{ m}$. Qual o volume do objeto em cm^3?

(A) $\frac{51\sqrt{3}}{10}$

(B) $\frac{63\sqrt{3}}{10}$

(C) $\frac{78\sqrt{3}}{10}$

(D) $\frac{87\sqrt{3}}{10}$

(E) $\frac{91\sqrt{3}}{10}$

10) A figura abaixo mostra-nos um esboço da visão frontal de uma esfera, um cilindro circular reto com eixo vertical e uma pirâmide regular de base quadrada, que foram guardados em um armário com porta, que possui a forma de um paralelepípedo retângulo com as menores dimensões possíveis para acomodar aqueles sólidos. Sabe-se que esses sólidos são tangentes entre si; todos tocam o fundo e o teto do armário; apoiam-se na base do armário; são feitos de material com espessura desprezível; a

esfera e a pirâmide tocam as paredes laterais do armário; 120 cm é a medida do comprimento do armário; $4\sqrt{11}\text{ dm}$ é a medida do comprimento da diagonal do armário; e a porta pode ser fechada sem resistência, então, a medida do volume do armário não ocupado pelos sólidos vale

(A) $\dfrac{2^4\left(2^5-5\pi\right)}{3}\text{ dm}^3$

(B) $\dfrac{2^4\left(2^5+5\pi\right)}{3}\text{ m}^3$

(C) $\dfrac{2^4\left(2^3-5\pi\right)}{5}\text{ dm}^3$

(D) $\dfrac{2^4\left(2^6+10\pi\right)}{6}\text{ dam}^3$

(E) $\dfrac{2^4\left(2^6-10\pi\right)}{6}\text{ dm}^3$

11) Um triângulo retângulo está inscrito no círculo $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ e possui dois vértices sobre a reta $7x+y+5=0$. O terceiro vértice que está situado na reta de equação $-2x+y+9=0$ é

(A) $(7,4)$

(B) $6,3$

(C) $(7,-4)$

(D) $(6,-4)$

(E) $(7,-3)$

12) Considere as funções reais f e g de variável real definidas por $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{2x-1}-1}}{\ln\left(4-x^2\right)}$ e $g(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, respectivamente, A e B subconjuntos dos números reais, tais que A é o domínio da função f e B o conjunto onde g é crescente. Podemos afirmar que $A\cap B$ é igual a

(A) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

(B) $[1,2[\cup]2,+\infty[$

(C) $]2,+\infty[$

(D) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$

(E) $\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

13) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z expressas em unidades de comprimento e nesta ordem, formam uma P.G. de razão 2. Sabendo que a área total do paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}=(x-2,y-2,z-4)$ e $\vec{w}=(3,-2,1)$?

(A) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$

(B) $\operatorname{arcsen}\frac{5\sqrt{14}}{126}$

(C) $\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{5}$

(D) $\operatorname{arc\,tg} -5\sqrt{5}$

(E) $\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{14}}{3}$

14) No sistema decimal, a quantidade de números ímpares positivos menores que 1000, com todos os algarismos distintos é
(A) 360
(B) 365
(C) 405
(D) 454
(E) 500

15) Qual o valor de $\int \operatorname{sen} 6x \cos x \, dx$?

(A) $-\frac{7\cos 7x}{2}-\frac{5\cos 5x}{2}+c$

(B) $\frac{7\operatorname{sen} 7x}{2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2}+c$

(C) $\frac{\operatorname{sen} 7x}{14}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{10}+c$

(D) $-\frac{\cos 7x}{14}-\frac{\cos 5x}{10}+c$

(E) $\frac{7\cos 7x}{2}+\frac{5\cos 5x}{2}+c$

16) Considere x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{R}$ raízes da equação $64x^3-56x^2+14x-1=0$. Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são termos consecutivos de uma P. G. e estão em ordem decrescente, podemos afirmar que o valor da expressão $\operatorname{sen}\left[(x_1+x_2)\pi\right]+\operatorname{tg}\left[(4x_1x_3)\pi\right]$ vale

(A) 0

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

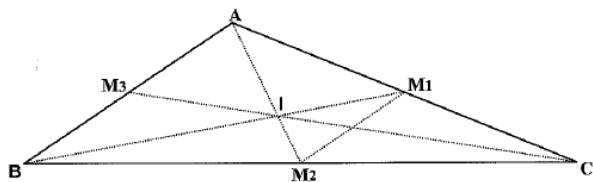
(C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
(D) 1
(E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

17) Coloque F (falso) ou V (verdadeiro) nas afirmativas abaixo, assinalando a seguir a alternativa correta.
( ) Se A e B são matrizes reais simétricas então AB também é simétrica.
( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ cujo termo geral é dado por $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ então A é inversível.
( ) Se A e B são matrizes reais $n \times n$ então $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$.
( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ e sua transposta é uma matriz inversível então a matriz A é inversível.
( ) Se A é uma matriz real quadrada e $A^2 = 0$ então $A = 0$.
Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (F) (F) (F)
(B) (V) (V) (V) (F) (V)
(C) (V) (V) (F) (F) (F)
(D) (F) (F) (F) (V) (F)
(E) (F) (F) (V) (V) (V)

18) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}$ cujos elementos são todas as soluções de $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} |2x+3| > \log_{\frac{1}{3}} |4x-1| \\ \dfrac{(x+4)^5}{(1-5x)^3 \sqrt[3]{3x^2-x+5}} \le 0 \end{cases}$. Podemos afirmar que S é um subconjunto de
(A) $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$
(B) $]-\infty,-3] \cup [3,+\infty[$
(C) $]-\infty,-5[\cup]3,+\infty[$
(D) $]-\infty,-3] \cup [2,+\infty[$
(E) $]-\infty,-2[\cup [4,+\infty[$

19) O raio de uma esfera em dm é igual à posição ocupada pelo termo independente de x no desenvolvimento de $\left(25^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2\frac{x}{2}\right)} + 5^{(1+\cos x)}\right)^{54}$ quando consideramos as potências de expoentes decrescentes de $25^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2\frac{x}{2}\right)}$. Quanto mede a área da superfície da esfera?
(A) $10,24\pi\ m^2$
(B) $115600\pi\ cm^2$
(C) $1444\pi\ dm^2$

(D) $1296\pi \text{ dm}^2$
(E) $19,36\pi \text{ m}^2$

20) Considere o triângulo ABC dado abaixo, onde M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados AC, BC e AB, respectivamente, e k a razão da área do triângulo AIB para a área do triângulo IM_1M_2 e $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 11\right)\sqrt{2}$. Se um cubo se expande de tal modo que num determinado instante sua aresta mede 5 dm e aumenta à razão de $|f(k)| \text{ dm/min}$ então podemos afirmar que a taxa de variação da área total da superfície deste sólido, neste instante, vale em dm^2/min

(A) $240\sqrt{2}$
(B) $330\sqrt{2}$
(C) $420\sqrt{2}$
(D) $940\sqrt{2}$
(E) $1740\sqrt{2}$

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2015/2016

1) d (Progressões e polinômios)
2) d (Sistemas lineares e trigonometria)
3) b (Integral e trigonometria)
4) a (Progressões)
5) e (Geometria analítica no R3 – reta e plano)
6) e (Geometria analítica no R2 – reta e trigonometria)
7) a (Função composta)
8) c (Geometria analítica no R3 – plano)
9) c (Geometria espacial)
10) d (Derivada)
11) b (Limites)
12) d (Derivada – estudo das funções)
13) e (Derivada e trigonometria)
14) a (Números complexos)
15) c (Função exponencial)
16) c (Determinantes)
17) d (Limite)
18) e (Probabilidade)
19) a (Geometria plana – áreas)
20) a (Geometria espacial – pirâmide)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2014/2015

01) A (Polinômios)
02) B (Função composta e inversa)
03) D (Função – domínio)
04) E (Progressões)
05) C (Derivada – estudo das funções)
06) A (Derivada)
07) D (Determinantes e funções trigonométricas)
08) E (Derivada – estudo das funções)
09) D (Função quadrática)
10) C (Números complexos)
11) B (Análise combinatória)
12) B (Matrizes)
13) D (Integral)
14) A (Geometria espacial)
15) D (Geometria espacial)
16) A (Trigonometria)

17) D (Geometria plana)
18) E (Geometria analítica no R2)
19) C (Geometria analítica no R2)
20) B (Geometria espacial)
21) D (Trigonometria)
22) B (Geometria analítica no R2)
23) A (Função quadrática)
24) D (Geometria analítica no R3)
25) A (Porcentagem)
26) D (Derivada – estudo das funções)
27) D (Análise combinatória)
28) E (Função)
29) E (Números complexos)
30) C (Integral)
31) C (Progressões)
32) B (Função exponencial)
33) A (Probabilidade)
34) A (Números complexos)
35) D (Derivada – estudo das funções)
36) C (Limite)
37) E (Vetores no R3)
38) A (Derivada – estudo das funções)
39) B (Limite)
40) E (Vetores no R3)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2013/2014

1) D (Equação modular)
2) D (Geometria analítica no R2 – cônicas)
3) B (Função composta)
4) E (Função trigonométrica inversa)
5) E (Limite e continuidade)
6) E (Geometria analítica no R2 – circunferência)
7) A (Geometria analítica no R3 – retas e planos)
8) B (Polinômios)
9) E (Geometria analítica no R2 – reta)
10) C (Progressões)
11) B (Números racionais)
12) B (Geometria espacial – prisma)
13) D (Função)
14) E (Binômio de Newton)
15) D (Matrizes)
16) D (Geometria espacial – cone)
17) C (Números complexos)
18) D (Números complexos)
19) D (Função quadrática)
20) E (Razões e proporções)
21) A (Vetores)

22) B (Geometria analítica no R2 – pontos)
23) B (Limites)
24) E (Função modular)
25) B (Função)
26) D (Porcentagem)
27) B (Geometria plana – lei dos senos)
28) A (Análise combinatória)
29) C (Geometria espacial – esfera)
30) D (Equação polinomial)
31) C (Função – gráfico)
32) A (Geometria plana – área)
33) B (Trigonometria)
34) A (Probabilidade)
35) A (Progressões)
36) D (Geometria espacial – cubo)
37) C (Equação trigonométrica)
38) E (Geometria espacial – geometria de posição)
39) D (Geometria espacial – geometria de posição)
40) C (Geometria plana – relações métricas nos polígonos)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2012/2013

1) B (Derivada – estudo das funções)
2) C (Progressões)
3) D (Integral)
4) E (Geometria espacial – esfera)
5) C (Função)
6) C (Progressões)
7) B (Geometria plana – circunferência)
8) B (Trigonometria)
9) D (Vetores)
10) C (Derivada – aplicações)
11) E (Geometria analítica no R3 – plano)
12) E (Derivada)
13) D (Progressões)
14) A (Integral)
15) D (Trigonometria – função trigonométrica inversa)
16) D (Probabilidade geométrica)
17) B (Geometria plana – áreas)
18) A (Números complexos)
19) E (Binômio de Newton)
20) A (Derivada – estudo as funções)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2011/2012

1) B (Geometria analítica no R2 – ponto e reta)
2) E (Limite)
3) A (Derivada – estudo das funções)
4) A (Integral)
5) A (Derivada)
6) E (Trigonometria)
7) A (Logaritmo)
8) B (Equação exponencial)
9) D (Probabilidade geométrica)
10) D (Função)
11) D (Sistemas lineares)
12) D (Matrizes e determinantes)
13) B (Integral)
14) C (Função quadrática)
15) B (Números complexos)
16) E (Geometria espacial – pirâmide)
17) B (Geometria espacial – tetraedro)
18) C (Progressões)
19) E (Geometria analítica no R2 – reta)
20) C (Vetores)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2010/2011

1) B (Integral)
2) A (Probabilidade)
3) A (Determinantes)
4) B (Equação exponencial)
5) E (Trigonometria)
6) C (Derivada)
7) C (Progressões)
8) D (Derivada)
9) C (Geometria espacial – cone)
10) A (Equação polinomial)
11) B (Derivada – taxa de variação)
12) D (Sistemas lineares)
13) D (Geometria analítica no R2 - Cônicas)
14) E (Geometria espacial – cone e pirâmide)
15) E (Inequação trigonométrica)
16) A (Derivada – estudo das funções)
17) D (Geometria analítica no R3 – reta)
18) C (Geometria espacial – pirâmide)
19) E (Geometria espacial – cilindro)
20) B (Progressões)

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL 2009/2010

1) C (Polinômios)
2) C (Trigonometria – relações fundamentais)
3) B (Derivada)
4) E (Vetores)
5) B (Função quadrática)
6) A (Derivada)
7) A (Geometria espacial – geometria de posição)
8) E (Geometria plana – áreas)
9) C (Geometria espacial - pirâmide)
10) A (Geometria espacial – cilindro, pirâmide e esfera)
11) B (Geometria analítica no R2 – circunferência e reta)
12) D (Função – domínio)
13) A (Vetores)
14) B (Análise combinatória)
15) D (Integral)
16) E (Equação polinomial)
17) D (Matrizes)
18) D (Inequação produto-quociente e logaritmo)
19) C (Binômio de Newton)
20) E (Derivada – taxa de variação)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 2010 A 2016

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Conjuntos numéricos					1			1	0,6%
Razões, proporções, porcentagem e regra de três					2	1		3	1,7%
Progressões		2	1	3	2	2	2	12	6,7%
Trigonometria	1	2	1	1	2	2		9	5,0%
Função trigonométrica direta e inversa				1	1			2	1,1%
Números complexos			1	1	2	3	1	8	4,4%
Polinômios	2	1			2	1		6	3,3%
Inequação produto-quociente	1							1	0,6%
Função	1		1	1	4	3	1	11	6,1%
Função quadrática	1		1		1	2		5	2,8%
Função exponencial		1	1			1	1	4	2,2%
Logaritmo			1					1	0,6%
Função modular					2			2	1,1%
Matrizes e determinantes	1	1	1		1	2	1	7	3,9%
Sistemas lineares		1	1				1	3	1,7%
Análise combinatória	1				1	2		4	2,2%
Binômio de Newton	1			1	1			3	1,7%
Probabilidade		1	1	1	1	1	1	6	3,3%
Limite			1		2	2	2	7	3,9%
Derivada	3	4	2	4		6	3	22	12,2%
Integral	1	1	2	2		2	1	9	5,0%
Geometria plana - triângulos e polígonos					2			2	1,1%
Geometria plana - circunferência				1		1		2	1,1%
Geometria plana - áreas	1			1	1		1	4	2,2%
Geometria analítica - ponto e reta			2		2		1	5	2,8%
Geometria analítica - circunferência	1				1	2		4	2,2%
Geometria analítica - cônicas		1			1	1		3	1,7%
Vetores e Geometria analítica no espaço	2	1	1	2	2	3	2	13	7,2%
Geometria espacial	3	4	2	1	6	3	2	21	11,7%
TOTAL POR PROVA	**20**	**20**	**20**	**20**	**40**	**40**	**20**	**180**	**100%**

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2015/2016

1) Em uma P.G., $a_4 = \frac{2(k^2+1)^2}{5k}$ e $a_1 = \frac{25k^2}{4(k^2+1)}$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Para o valor médio M de k, no intervalo onde a P.G. é decrescente, o resto da divisão do polinômio $P(x) = \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 25x^2 - 10$ pelo binômio $\left(Mx - \frac{15}{8}\right)$ é

a) $\frac{1039}{32}$

b) $\frac{1231}{16}$

c) $\frac{1103}{32}$

d) $\frac{1885}{32}$

e) $\frac{1103}{16}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**
Pela fórmula do termo geral da P.G. , temos:

$$a_4 = a_1 \cdot q_3 \Leftrightarrow \frac{2(k^2+1)^2}{5k} = \frac{25k^2}{4(k^2+1)} \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{8(k^2+1)^3}{125k^3} \Leftrightarrow q = \frac{2(k^2+1)}{5k} > 0,$$

pois $k \in \mathbb{R}_+^*$.
A P.G. é decrescente se, e somente se, $0 < q < 1$. Assim, devemos ter:

$$q = \frac{2(k^2+1)}{5k} < 1 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k < 2.$$

Dessa forma, o valor médio M de k no intervalo onde a P.G. é decrescente é $M = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{5}{4}$.

Assim, temos: $\left(Mx - \frac{15}{8}\right) = \left(\frac{5}{4}x - \frac{15}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Pelo teorema de D'Alembert (teorema do reto), o resto da divisão do polinômio $P(x)=\frac{5}{2}x^5-\frac{5}{4}x^4+25x^2-10$ pelo binômio $\left(\frac{5}{4}x-\frac{15}{8}\right)$ é dado por

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^5-\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+25\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-10=\frac{5}{2}\cdot\frac{243}{32}-\frac{5}{4}\cdot\frac{81}{16}+25\cdot\frac{9}{4}-10=\frac{1885}{32}.$$

2) Analise o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x-2my+3z=0 \\ 2x+6y-4mz=0 \end{cases}$$

Para o maior valor inteiro de m que torna o sistema acima possível e indeterminado, pode-se afirmar que a expressão $\left|\text{tg}\left(\frac{\pi m}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi m}{3}\right)-1\right|$ vale

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $-\frac{11}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $-\frac{1}{4}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**
O sistema em análise é homogêneo, então se ele for de Cramer (determinante da matriz incompleta não nulo) será possível e determinado e se não for de Cramer (determinante da matriz incompleta não nulo) será possível e indeterminado.
Dessa forma, o determinante da matriz incompleta A do sistema deve ser nulo.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2+6+24+4m+16m-18=0 \Leftrightarrow 2m^2+5m+3=0 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{2} \vee m=-1$$

Logo, o maior valor inteiro de m que torna o sistema possível e indeterminado é $m=-1$.

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi m}{3}\right)-1\right|=\left|\operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{-2\pi}{3}\right)-1\right|=\left|-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2-1\right|=$$

$$=\left|-1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right|=\left|-\frac{7}{4}\right|=\frac{7}{4}$$

3) Resolvendo $\displaystyle\int\frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\cos^4(2x)-\frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{\operatorname{cotg}(2x)}\right]}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\sqrt{\sec^2(2x)-1}}\sec^2(x)\,dx$ encontra-se

a) $-\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}(2x)+c$

b) $-\frac{1}{2}e^{-2\operatorname{tg}x}+c$

c) $\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)+c$

d) $-\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+c$

e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}\sec(4x)+c$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**

$$\int\frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\cos^4(2x)-\frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{\operatorname{cotg}(2x)}\right]}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\sqrt{\sec^2(2x)-1}}\sec^2(x)\,dx=$$

$$=\int\frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\cos^4(2x)-\operatorname{tg}(2x)\operatorname{sen}^4(2x)\right]}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\sqrt{\operatorname{tg}^2(2x)}}\sec^2(x)\,dx=$$

$$=\int\frac{\left[\operatorname{tg}(2x)\left[\cos^4(2x)-\operatorname{sen}^4(2x)\right]\right]}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\cdot\operatorname{tg}(2x)}\sec^2(x)\,dx=$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}(2x)\cos(4x)}{e^{2\operatorname{tg}x}\cos(4x)\cdot\operatorname{tg}(2x)}\sec^2(x)\,dx=$$

$$=\int e^{-2\operatorname{tg}x}d(\operatorname{tg}x)=-\frac{1}{2}e^{-2\operatorname{tg}x}+c$$

4) A soma dos três primeiros termos de uma P.G. crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos nessa ordem, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale
a) 1
b) 4
c) 8
d) 9
e) 11

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado a fim de ficar mais preciso.)**
$\text{PG}: a_1, a_2, a_3$ de razão $q > 1$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 91 \end{cases}$$

A justaposição dos três termos resulta um número de três algarismos, então cada termo da PG é um algarismo, ou seja, um número inteiro de 1 a 9 (se algum deles fosse zero não teríamos uma PG crescente).

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 91 \Leftrightarrow a_1^2 + (a_1 \cdot q)^2 + (a_1 \cdot q^2)^2 = 91 \Leftrightarrow a_1^2 \cdot (1 + q^2 + q^4) = 7.13$$

Como a_1 é um número inteiro positivo, então a_1^2 é um quadrado perfeito, o que implica $a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$.

$$\Rightarrow 1 + q^2 + q^4 = 91 \Leftrightarrow q^4 + q^2 - 90 = 0 \Leftrightarrow q^2 = -10 \vee q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$$

$$q > 1 \Rightarrow q = 3$$

A PG é 1, 3, 9 e o número formado pela justaposição de seus termos é $139 = 23 \cdot 6 + 1$, então o resto da divisão é 1.

5) Uma reta r passa pelo ponto $M(1,1,1)$ e é concorrente às seguintes retas: $r_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 + 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Pode-se dizer que as equações paramétricas dessa reta r são

a) $\begin{cases} x = 1 + 11t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 - 25t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 25t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 + 8t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 - 25t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 - 12t \\ y = 1 + 11t \\ z = 1 + 4t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 - 25t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 + 8t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

RESPOSTA:e

RESOLUÇÃO: **(As alternativas dessa questão foram adaptadas, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**
Seja α o plano determinado pelo ponto M e pela reta r_1, e β o plano determinado pelo ponto M e a reta r_2.
Se $M(1,1,1) \in r$ e r é concorrente a r_1, então $r \subset \alpha$.Se $M \in r$ e r é concorrente a r_2, então $r \subset \beta$. Portanto, a reta r é a interseção entre os planos α e β.
A reta r_1 tem vetor diretor $\vec{d}_1 = (3,-2,-1)$ e passa pelo ponto $A = (-1,-3,2)$. Logo, o vetor $\overrightarrow{AM} = (2,4,-1)$ é paralelo a α.
A reta r_2 tem vetor diretor $\vec{d}_2 = (-1,-5,2)$ e passa pelo ponto $B = (4,2,-1)$. Logo, o vetor $\overrightarrow{BM} = (-3,-1,2)$ é paralelo a β.

O vetor normal ao plano α, $\vec{n}_\alpha$, é paralelo a $\vec{d}_1 \times \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + \hat{j} + 16\hat{k} = (6,1,16)$. Assim, podemos adotar $\vec{n}_\alpha = (6,1,16)$

O vetor normal ao plano β, $\vec{n}_\beta$, é paralelo a $\vec{d}_2 \times \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -5 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8\hat{i} - 4\hat{j} - 14\hat{k} = -2 \cdot (4,2,7)$.
Assim, podemos adotar $\vec{n}_\beta = (4,2,7)$.

O vetor diretor da reta $r = \alpha \cap \beta$, $\vec{d}_r$, é paralelo a $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 1 & 16 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -25\hat{i} + 22\hat{j} + 8\hat{k}$.

Portanto, as equações paramétricas da reta r são $\begin{cases} x = 1 - 25t \\ y = 1 + 22t \\ z = 1 + 8t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

6) As retas $r_1 : 2x - y + 1 = 0$; $r_2 : x + y + 3 = 0$ e $r_3 : \alpha x + y - 5 = 0$ concorrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3\text{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{tg}\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$ é

a) $3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $2 + \frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

O ponto de interseção P das retas $r_1 : 2x - y + 1 = 0$ e $r_2 : x + y + 3 = 0$ é determinado pelo sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \ \wedge \ y = -3 - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{3}.$$

Assim, o ponto de interseção de r_1 e r_2 é $P = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Se as três retas concorrem em um mesmo ponto, então $P \in r_3$. Assim, temos:

$$\alpha \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow -4\alpha - 5 - 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5.$$

Vamos agora calcular o valor da expressão:

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] = \text{sen}\left[\frac{(-3-(-5))\pi}{8}\right] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{(-5)\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right)-3\operatorname{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right]-\frac{5\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{5}{2}=3-\frac{3\sqrt{2}}{4}=3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

7) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x)=\begin{cases}4x-3, & \text{se } x\ge 0\\ x^2-3x+2, & \text{se } x<0\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x>2\\ 1-x^2, & \text{se } x\le 2\end{cases}$. Sendo assim, pode-se dizer que $(f\circ g)(x)$ é definida por

a) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x+1, & \text{se } x>2\\ 1-4x^2, & \text{se } -1\le x\le 1\\ x^4+x^2, & \text{se } x<-1 \text{ ou } 1<x\le 2\end{cases}$

b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x-1, & \text{se } x>2\\ 1-4x^2, & \text{se } -1\le x<1\\ x^4-x^2, & \text{se } x<-1 \text{ ou } 1\le x\le 2\end{cases}$

c) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x+1, & \text{se } x\ge 2\\ 1-4x^2, & \text{se } -1<x<1\\ x^4+x^2, & \text{se } x\le -1 \text{ ou } 1\le x<2\end{cases}$

d) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x+1, & \text{se } x\ge 2\\ 1-4x^2, & \text{se } -1<x\le 1\\ x^4+x^2, & \text{se } x<-1 \text{ ou } 1<x<2\end{cases}$

e) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x+1, & \text{se } x>2\\ -1-4x^2, & \text{se } -1\le x<1\\ x^4-x^2, & \text{se } x<-1 \text{ ou } 1\le x\le 2\end{cases}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}4\cdot g(x)-3, & \text{se } g(x)\ge 0\\ [g(x)]^2-3\cdot g(x)+2, & \text{se } g(x)<0\end{cases}$$

Vamos estudar o sinal de g(x):

$$g(x)\ge 0\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x+1\ge 0\wedge x>2\Leftrightarrow x\ge -1\wedge x>2\Leftrightarrow x>2\\ \text{ou}\\ 1-x^2\ge 0\wedge x\le 2\Leftrightarrow -1\le x\le 1\wedge x\le 2\Leftrightarrow -1\le x\le 1\end{array}\right.$$

Assim, temos:
Se $x > 2$, então $g(x) = x + 1$ e $g(x) \geq 0$.
Se $1 < x \leq 2$, então $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) < 0$.
Se $-1 \leq x \leq 1$, então $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) \geq 0$.
Se $x < -1$, então $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) < 0$.
Utilizando essas informações na expressão de $(f \circ g)(x)$, temos:
Se $x > 2$, então $g(x) = x + 1$ e $g(x) \geq 0$, o que implica
$(f \circ g)(x) = 4 \cdot g(x) - 3 = 4(x+1) - 3 = 4x + 1$.
Se $x < -1$ ou $1 < x \leq 2$, então $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) < 0$, o que implica
$(f \circ g)(x) = [g(x)]^2 - 3 \cdot g(x) + 2 = (1 - x^2)^2 - 3 \cdot (1 - x^2) + 2 = x^4 + x^2$.
Se $-1 \leq x \leq 1$, então $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) \geq 0$, o que implica
$(f \circ g)(x) = 4 \cdot g(x) - 3 = 4(1 - x^2) - 3 = 1 - 4x^2$.

Portanto, $(f \circ g)$ é dada por $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

8) Um plano π_1 contém os pontos $M(-1,3,2)$ e $N(-2,0,1)$. Se π_1 é perpendicular ao plano $\pi_2 : 3x - 2y + z - 15 = 0$, é possível dizer que o ângulo entre π_1 e o plano $\pi_3 : x - y + z - 7 = 0$ vale

a) $\arccos\left(\frac{8\sqrt{2}}{15}\right)$

b) $\text{arccot}\left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

c) $\arccos\left(-\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

d) $\arccos\left(\frac{61}{45\sqrt{2}}\right)$

e) $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{194}}{16}\right)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**
Seja $\vec{n}_1 = (a, b, c)$ o vetor normal do plano π_1.
O vetor normal do plano $\pi_2 : 3x - 2y + z - 15 = 0$ é $\vec{n}_2 = (3, -2, 1)$.
Como $\pi_1 \perp \pi_2$, então $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (3, -2, 1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0$.

O vetor $\overrightarrow{NM}=(1,3,1)$ é paralelo ao plano π_1, então é perpendicular ao vetor $\vec{n}_1$ normal de π_1. Assim, temos: $\overrightarrow{NM}\cdot\vec{n}_1=0\Leftrightarrow(1,3,1)\cdot(a,b,c)=0\Leftrightarrow a+3b+c=0$.

Dessa forma, o vetor normal ao plano π_1 é definido pelo sistema $\begin{cases}3a-2b+c=0\\a+3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+c=2b\\a+c=-3b\end{cases}$

$$\Rightarrow(3a+c)-(a+c)=2b-(-3b)\Leftrightarrow 2a=5b\Leftrightarrow a=\frac{5}{2}b$$

$$\Rightarrow c=-3b-a=-3b-\left(\frac{5}{2}b\right)=-\frac{11}{2}b$$

Portanto, $\vec{n}_1=(a,b,c)=\left(\frac{5}{2}b,b,-\frac{11}{2}b\right)=\frac{b}{2}(5,2,-11)$ e podemos adotar $\vec{n}_1=(5,2,-11)$.

O vetor normal do plano $\pi_3: x-y+z-7=0$ é $\vec{n}_3=(1,-1,1)$.

O ângulo θ entre os planos π_1 e π_3 é igual ao ângulo entre seus vetores normais $\vec{n}_1=(5,2,-11)$ e $\vec{n}_3=(1,-1,1)$. Assim, temos:

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_3|}=\frac{5\cdot1+2\cdot(-1)+(-11)\cdot1}{\sqrt{5^2+2^2+(-11)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{-8}{\sqrt{150}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-8}{15\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{15}.$$

Logo, $\theta=\arccos\left(-\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$.

9) Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de $60°$ com suas bases, então a razão entre o volume de uma esfera de raio $24^{1/6}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$

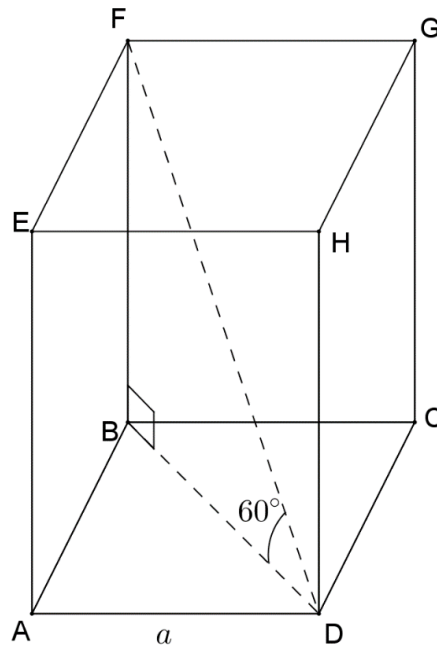
b) $\frac{81\pi}{8}$

c) $\frac{8\pi}{81}$

d) $\frac{8\pi}{27}$

e) $\frac{81}{8\pi}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Um prisma quadrangular regular possui um quadrado como base e arestas laterais iguais e perpendiculares ao plano da base.
Seja a base um quadrado de lado a.

No quadrado ABCD a diagonal é $BD = a\sqrt{2}$.

No triângulo retângulo BDF determinado pela diagonal DF, temos $B\hat{D}F = 60°$ e $\frac{BF}{BD} = tg60° \Leftrightarrow \frac{BF}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow BF = a\sqrt{6}$.

A área lateral do prisma é igual à área de quatro retângulos de lados a e $a\sqrt{6}$. Assim, temos: $S_L = 4 \cdot a \cdot a\sqrt{6} = 36\sqrt{6} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$.

O volume do prisma é $V_P = S_B \cdot h = a^2 \cdot a\sqrt{6} = a^3\sqrt{6} = 3^3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$.

O volume da esfera de raio $R = 24^{1/6}$ é $V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(24^{1/6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 24^{1/2} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}\pi}{3}$.

A razão entre o volume da esfera e o do prisma é $\frac{V_E}{V_P} = \frac{\frac{8\sqrt{6}\pi}{3}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}$.

10) Um gerador de corrente direta tem uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms. E e r são constantes. Se R ohms é a resistência externa, a resistência total é $(r + R)$ ohms e, se P é a potência, então $P = \frac{E^2R}{(r+R)^2}$. Sendo assim, qual é a resistência externa que consumirá o máximo de potência?

a) 2r
b) $r+1$
c) $\frac{r}{2}$
d) r
e) $r(r+3)$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Vamos derivar a potência em relação à resistência externa R e encontrar a raiz da derivada. Assim, temos:

$$\frac{dP}{dR}=\frac{E^2\cdot(r+R)^2-E^2R\cdot 2(r+R)}{(r+R)^4}=\frac{E^2}{(r+R)^4}\left[r^2+2rR+R^2-2rR-2R^2\right]=$$

$$=\frac{E^2}{(r+R)^4}\left[r^2-R^2\right]=0\Leftrightarrow R=r$$

Observe que para confirmar que se trata de um ponto de máximo, basta observar que em $R=r$ a derivada muda de positiva para negativa, ou seja, a função muda de crescente para decrescente, o que corresponde a um ponto de máximo.

11) Calculando $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{tgx-x}{x-\text{sen}\,x}+\frac{x-\text{sen}\,x}{tg^3x}\right\}$ encontra-se

a) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{13}{6}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{13}{3}$

e) $\frac{7}{6}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$L=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{tgx-x}{x-\text{sen}\,x}+\frac{x-\text{sen}\,x}{tg^3x}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx-x}{x-\text{sen}\,x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\text{sen}\,x}{tg^3x}\right)$$

Os dois limites são da forma $\frac{0}{0}$, então podemos aplicar o teorema de L'Hôpital.

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx-x}{x-\text{sen}\,x}\right)\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2x-1}{1-\cos x}\right)\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sec x\cdot(\sec x\cdot tgx)}{\text{sen}\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\cos^3x}\right)=\frac{2}{1^3}=2$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{3\operatorname{tg}^2 x\cdot \sec^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{3\operatorname{tg}^2 x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}\right) \overset{0/0}{=} \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x\sec^2 x+4\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\operatorname{tg} x\cdot\left(1+2\operatorname{tg}^2 x\right)}\right) = \frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\left(1+2\operatorname{tg}^2 x\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^3 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1^3}{1+2\cdot 0^2} = \frac{1}{6}$$

$$L = L_1 + L_2 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

12) O ângulo que a reta normal à curva C, definida por $f(x) = x^{x-1}$, no ponto $P(2,2)$, faz com a reta $r: 3x+2y-5=0$ é

a) $\theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2+4\ln 2+4\ln^2 2\right)^{-1/2}\right)\right)$

b) $\theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2-4\ln 2+4\ln^2 2\right)^{-1/2}\right)\right)$

c) $\theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2+4\ln 2-4\ln^2 2\right)^{-1/2}\right)\right)$

d) $\theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2+4\ln 2+4\ln^2 2\right)\right)^{-1/2}\right)$

e) $\theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2+4\ln 2+4\ln^2 2\right)\right)\right)^{-1/2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$y = x^{x-1} \Rightarrow \ln y = (x-1)\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y\cdot\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$$

No ponto $P(2,2)$, o valor da derivada é $m_t = y' = 2\cdot\left(\ln 2 + \frac{2-1}{2}\right) = 2\ln 2 + 1$, que corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto.

O coeficiente angular da reta normal à curva no ponto é $m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{2\ln 2+1}$.

O coeficiente angular da reta $r: 3x+2y-5=0$ é $m_r = -\frac{3}{2}$.

O ângulo θ entre a reta normal à curva é a reta r é dado por

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_r - m_t}{1+m_r\cdot m_t} = \frac{-\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2\ln 2+1}\right)}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-1}{2\ln 2+1}\right)} = \frac{-3(2\ln 2+1)+2}{2(2\ln 2+1)+3} = \frac{-6\ln 2-1}{4\ln 2+5}$$

$$\sec^2\theta = 1+\text{tg}^2\theta = 1+\left(\frac{-6\ln 2-1}{4\ln 2+5}\right)^2 = 1+\frac{36\ln^2 2+12\ln 2+1}{16\ln^2 2+40\ln 2+25} = \frac{52\ln^2 2+52\ln 2+26}{16\ln^2 2+40\ln 2+25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{16\ln^2 2+40\ln 2+25}{52\ln^2 2+52\ln 2+26} = \frac{(4\ln 2+5)^2}{13\left(4\ln^2 2+4\ln 2+2\right)}$$

Se θ é agudo, então

$$\cos\theta = \frac{4\ln 2+5}{\left(13\left(2+4\ln 2+4\ln^2 2\right)\right)} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left((5+4\ln 2)\left(13\left(2+4\ln 2+4\ln^2 2\right)\right)^{-1/2}\right).$$

13) As curvas representantes dos gráficos de duas funções de variável real $y=f(x)$ e $y=g(x)$ interceptam-se em um ponto $P_0(x_0,y_0)$, sendo $x_0\in D(f)\cap D(g)$. É possível definir o ângulo formado por essas duas curvas no ponto P_0 como sendo o menor ângulo formado pelas retas tangentes àquelas curvas no ponto P_0. Se $f(x)=x^2-1$, $g(x)=1-x^2$ e θ é o ângulo entre as curvas na interseção de abscissa positiva, então, pode-se dizer que o valor da expressão $\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos 2\theta-\text{cossec}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^{1/2}$ é

a) $\frac{\sqrt{82}}{5}$

b) $3\frac{\sqrt{2}}{5}$

c) $\frac{68}{25}$

d) $\frac{7}{25}$

e) $2\frac{\sqrt{17}}{5}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Vamos identificar a interseção de abscissa positiva.

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-1=1-x^2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1\,\text{cur}$

Assim, a interseção de abscissa positiva é $P_0(1,0)$.

Vamos calcular o ângulo entre as curvas em $P_0(1,0)$.

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2\cdot 1=2$

$$g'(x) = -2x \Rightarrow g'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\text{tg}\theta = \left| \frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1)g'(1)} \right| = \left| \frac{2 - (-2)}{1 + 2 \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{4}{-3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \text{tg}^2\theta}{1 + \text{tg}^2\theta} = \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1 - \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{-7}{25}$$

Vamos agora calcular o valor da expressão do enunciado.

$$\text{sen}\frac{5\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{6} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{cossec}\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\text{sen}\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\text{sen}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\left[\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos 2\theta - \text{cossec}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^{1/2} = \left[\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{7}{25}\right) - (-2)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{4}{4} - \frac{7}{25} + 2\right]^{1/2} = \left[\frac{68}{25}\right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{17}}{5}$$

14) Considere os números complexos da forma $z_n = \rho\,\text{cis}\left((17 - n) \cdot \frac{\pi}{50}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O menor número natural n, tal que o produto $Z_1 \cdot Z_2 \cdot \ldots \cdot Z_n$ é um número real positivo, é igual a

a) 8
b) 16
c) 25
d) 33
e) 50

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot \ldots \cdot Z_n = \rho^n \text{cis}\left[(17 - 1) . \frac{\pi}{50} + (17 - 2) \cdot \frac{\pi}{50} + \ldots + (17 - n) \cdot \frac{\pi}{50}\right] =$$

$$= \rho^n \text{cis}\left[\frac{\pi}{50} \cdot \left[(17 - 1) + (17 - 2) + \ldots + (17 - n)\right]\right] = \rho^n \text{cis}\left[\frac{\pi}{50} \cdot \left[17n - \frac{n(n + 1)}{2}\right]\right] =$$

$$= \rho^n \text{cis}\left[\frac{\pi}{100} \cdot \left(33n - n^2\right)\right] \in \mathbb{R}_+$$

A primeira ocorrência de um número real é quando

$\frac{\pi}{100}\cdot\left(33n-n^2\right)=2\pi \Leftrightarrow n^2-33n+200=0 \Leftrightarrow n=8 \ \vee \ n=25$.
Como a função quadrática não é monotônica devemos verificar que os naturais de 1 a 7 não resultam números reais, o que realmente ocorre.
Portanto, o menor natural n tal que o produto dado é um real positivo é 8.

15) O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, se transformando no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t)=N_0\cdot e^{-\alpha t}$, onde $N(t)$ é a quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N_0 é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre
a) 500 e 1000 anos.
b) 1000 e 1500 anos.
c) 1500 e 2000 anos.
d) 2000 e 2500 anos.
e) 2500 e 3000 anos.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$$N(t)=N_0\cdot e^{-\alpha t} \Rightarrow N(898)=N_0\cdot e^{-\alpha\cdot 898}=\frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot 898}=\frac{1}{2}$$
Para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade incial, ou seja, $\frac{N_0}{4}$, devemos ter
$$N(t)=N_0\cdot e^{-\alpha t}=\frac{N_0}{4} \Leftrightarrow e^{-\alpha t}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(e^{-\alpha\cdot 898}\right)^2=e^{-\alpha\cdot 1796} \Leftrightarrow -\alpha t=-\alpha\cdot 1796 \Leftrightarrow t=1796$$
que é um número entre 1500 e 2000.

16) Uma função $y=f(x)$ é definida pelo determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} x^2 & x-1 & x & -2 \\ x^3 & x & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ em cada $x\in\mathbb{R}$ tal que A é invertível. É correto afirmar que o conjunto imagem de f é igual a
a) $(-\infty,4]$
b) $\mathbb{R}-\{0,4\}$
c) $(-\infty,4]-\{0\}$
d) $(-\infty,4)$
e) $[4,+\infty)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\det A=\begin{vmatrix} x^2 & x-1 & x & -2 \\ x^3 & x & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1.(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} x-1 & x & -2 \\ x & x & 1-x \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-x(x-1)+x(1-x)+2x+x^2=-x^2+4x$$

A é invertível se, e somente se, $\det A\neq 0$.

$\det A=-x^2+4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\ \wedge\ x\neq 4$

Assim, a função é $f(x)=-x^2+4x$ e o seu domínio é $D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$.

O valor máximo de f ocorre quando $f'(x)=-2x+4=0\Leftrightarrow x=2$, então seu valor máximo é $f(2)=4$
.

A imagem de f com domínio em todos os reais é $(-\infty,4]$.

Como o domínio é $D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$, devemos excluir da imagem $f(0)=0$ e $f(4)=0$. Portanto, a imagem de f é $\text{Im}_f=(-\infty,4]-\{0\}$.

17) No limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$, o valor de <u>a</u> pode ser determinado para que tal limite exista. Nesse caso, o valor do limite é

a) $-\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{1}{8}$

d) $-\dfrac{1}{8}$

e) 0

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O limite $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}$ é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Vamos aplicar o teorema de L'Hôpital.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1-2ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+2a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4a\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}}$$

Como o denominador do último limite tende a zero, para que o limite original exista, o numerador do último limite também deve tender a zero.

$\lim_{x\to 0}\left(1+4a\sqrt{1+x}\right)=1+4a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

Substituindo $a=-\frac{1}{4}$ no numerador do último limite e aplicando novamente o teorema de L'Hôpital, temos:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{4\sqrt{x^2+x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x^3}}\cdot\left(2x+3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\cdot\frac{x\sqrt{1+x}}{2x(2+3x)}\right)=-\frac{1}{8}$$

18) Três cones circulares C_1, C_2 e C_3, possuem raios R, $\frac{R}{2}$ e $\frac{R}{4}$, respectivamente. Sabe-se que possuem a mesma altura e que $C_3 \subset C_2 \subset C_1$. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto de C_1, a probabilidade de que esse ponto esteja em C_2 e não esteja em C_3 é igual a

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{16}$

e) $\frac{3}{16}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adequado, pois a mesma foi anulada da maneira que foi originalmente proposta)**

O volume de C_1 corresponde ao nosso espaço amostral, então $\#(\Omega)=V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h$.

Os casos favoráveis correspondem aos pontos que estejam em C_2 e não estejam em C_3, ou seja, à diferença entre os volumes V_2 e V_3.

Assim, $\#(A)=V_2-V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{R}{4}\right)^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h\cdot\frac{3}{16}$.

Portanto, a probabilidade pedida é $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h\cdot\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h}=\frac{3}{16}$.

19) Seja ABCD um quadrado de lado ℓ, em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Pode-se dizer que a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A, B, Q e P vale

a) $\frac{3\ell^2}{16}$

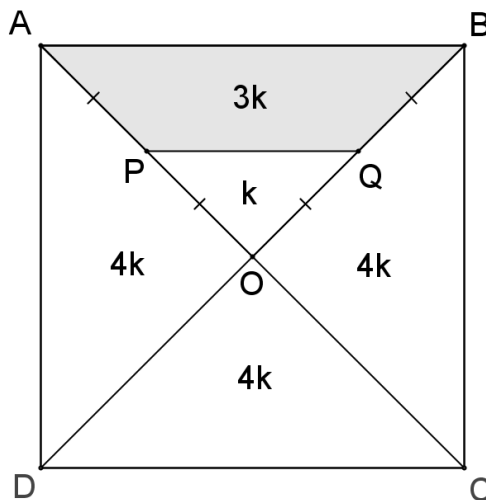
b) $\frac{\ell^2}{16}$

c) $\frac{3\ell^2}{8}$

d) $\frac{\ell^2}{8}$

e) $\frac{3\ell^2}{24}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{OB}=\frac{1}{2}\overset{(L_pAL_p)}{\Rightarrow}\Delta OPQ\sim\Delta OAB\Rightarrow\frac{S_{OPQ}}{S_{OAB}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{S_{OPQ}}{1}=\frac{S_{OAB}}{4}=k$$

$$\Rightarrow S_{OPQ}=k\ \wedge\ S_{OAB}=4k\Rightarrow S_{ABQP}=S_{OAB}-S_{OPQ}=4k-k=3k$$

$$\Delta OAB\equiv\Delta OBC\equiv\Delta OCD\equiv\Delta ODA\Rightarrow S_{OAB}=S_{OBC}=S_{OCD}=S_{OAD}=4k$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=4\cdot 4k=16k=\ell^2\Leftrightarrow k=\frac{\ell^2}{16}$$

$$\Rightarrow S_{ABQP}=3k=\frac{3\ell^2}{16}$$

20) Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 30º. Se o lado do polígono mede ℓ unidades de comprimento, o volume da pirâmide, cuja base é esse polígono e cuja altura vale o triplo da medida do lado, é igual a

a) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}$

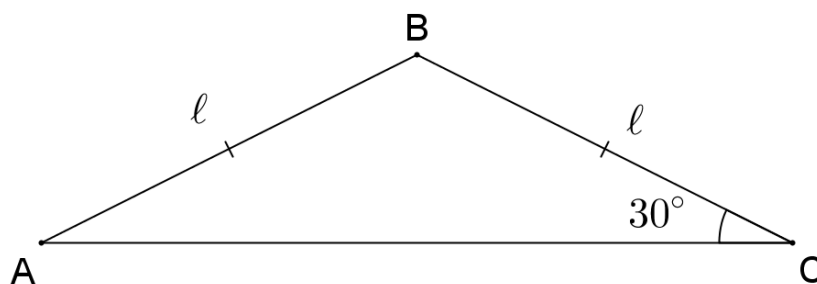
b) $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\ell\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{3}$

RESPOSTA:a

RESOLUÇÃO:
O triângulo ABC representa a parte do polígono regular descrita no enunciado.

Como o polígono é regular, então $\overline{AB} = \overline{BC} = \ell$, o que implica que o triângulo ABC é isósceles e $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 30°$.

Assim, $A\hat{B}C = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ é o ângulo interno do polígono regular, o que implica que o polígono é um hexagono regular.

Logo, a pirâmide tem como base um hexágono regular de lado ℓ e altura de medida $h = 3\ell$. Assim, seu volume é dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 3\ell = \frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}.$$

Observe que a área do hexágono regular foi calculada somando a área de 6 triângulos equiláteros de lado ℓ.

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2014/2015

1) Considere $P(x)=(m-4)(m^2+4)x^5+x^2+kx+1$ um polinômio na variável x, em que m e k são constantes reais. Quais os valores das constantes m e k para que $P(x)$ não admita raiz real?

(A) $m=4$ e $-2<k<2$
(B) $m=-4$ e $k>2$
(C) $m=-2$ e $-2<k<2$
(D) $m=4$ e $|k|>2$
(E) $m=-2$ e $k>-2$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Sabe-se que todo polinômio de coeficientes reais e grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. Para que $P(x)$ não admita raiz real, o polinômio deve ser de grau par, então o coeficiente de x^5 deve ser nulo.

$$(m-4)(m^2+4)=0 \overset{m\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} m=4$$

O polinômio resultante é $P(x)=x^2+kx+1$. Para que esse polinômio não possua raízes reais, seu discriminante Δ deve ser negativo.

$\Delta=k^2-4\cdot1\cdot1<0 \Leftrightarrow -2<k<2$

Assim, para que $P(x)$ não admita raiz real, devemos ter $m=4$ e $-2<k<2$.

2) Considere as funções reais $f(x)=\dfrac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x)=2^{\frac{x}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$. Qual é o valor da função composta $(g\circ f^{-1})(90)$?

(A) 1
(B) 3
(C) 9
(D) $\dfrac{1}{10}$
(E) $\dfrac{1}{3}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$f^{-1}(90)=k \Leftrightarrow f(k)=90 \Rightarrow f(x)=\frac{100}{1+2^{-k}}=90 \Leftrightarrow 1+2^{-k}=\frac{10}{9} \Leftrightarrow 2^{-k}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2^k=9$$

$$(g\circ f^{-1})(90)=g(f^{-1}(90))=g(k)=2^{\frac{k}{2}}=(2^k)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3$$

3) Sabendo que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, qual é o domínio da função real de variável real $f(x) = \dfrac{\arccos^3\left(\log \frac{x}{10}\right)}{\sqrt{4x - x^3}}$?

(A) $]0,2[$

(B) $\left]\frac{1}{2},1\right[$

(C) $]0,1]$

(D) $[1,2[$

(E) $\left[\frac{1}{2},2\right[$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Condição de existência do logaritmo: $\frac{x}{10} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Condição de existência da função arco cosseno: $-1 \le \log \frac{x}{10} \le 1 \Leftrightarrow 10^{-1} \le \frac{x}{10} \le 10^{1} \Leftrightarrow 1 \le x \le 100$

Condição de existência da raiz quadrada no denominador:

$4x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \ \vee \ 0 < x < 2$

O domínio da função é a interseção desses três intervalos. Assim, temos: $D_f = [1,2[$.

4) Considere a sequência $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1+2}{1+2}$; $x_3 = \frac{1+2+3}{1+2+4}$; $x_4 = \frac{1+2+3+4}{1+2+4+8}$; … .O valor de x_n é

(A) $\frac{n+1}{2}$

(B) $\frac{n(n-1)}{2^n}$

(C) $\frac{n(n+1)}{2^n - 1}$

(D) $\frac{n(n+1)}{2^n}$

(E) $\frac{n(n+1)}{2(2^n - 1)}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$x_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}} = \frac{n(n+1)}{2\cdot(2^n-1)}$$

Observe que o numerador é uma P.A. de primeiro termo 1 e razão r = 1 e o denominador é uma P.G. de primeiro termo 1 e razão q = 2 ambas com n termos.

5) A função real de variável real $f(x) = \frac{2x-a}{bx^2+cx+2}$, onde a, b e c são constantes reais, possui as seguintes propriedades:

I) o gráfico de f passa pelo ponto $(1,0)$ e

II) a reta y = 1 é um assíntota para o gráfico de f.

O valor de $a+b+c$ é

(A) -2
(B) -1
(C) 4
(D) 3
(E) 2

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$(1,0)\in f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1-a}{b\cdot 1^2+c\cdot 1+2}=0 \Leftrightarrow a=2$$

Se y = 1 é uma assíntota horizontal ao gráfico de f, então $\lim_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{bx^2+cx+2}\right)=1$.

Se $b\neq 0$, o limite é 0. Assim, para que o limite seja igual a 1, devemos ter b = 0 e c = 2.

Portanto, $a+b+c=2+0+2=4$.

6) Se o limite $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}\right)$ representa a derivada de uma função real de variável real $y=f(x)$ em x = a, então a equação da reta tangente ao gráfico de $y=f(x)$ no ponto $(a,f(a))$ é

(A) $32y-x=48$
(B) $y-2x=-30$
(C) $32y-x=3048$
(D) $y-32x=12$
(E) $y-2x=0$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{4}(16+h)^{-\frac{3}{4}}}{1}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{(16+h)^3}}\right)=\frac{1}{32}$$

Notemos agora que

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}\right)\Rightarrow f(a+h)=\sqrt[4]{16+h}\ \wedge\ f(a)=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt[4]{x}\ \wedge\ a=16$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$ é $\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)\Leftrightarrow y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Assim, temos:

$y=\frac{1}{32}(x-16)+2\Leftrightarrow 32y-x=48$.

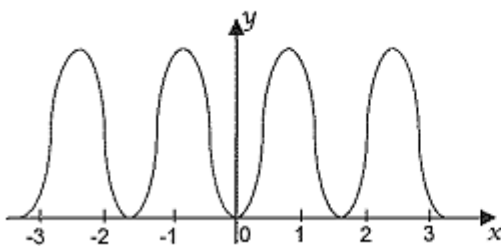
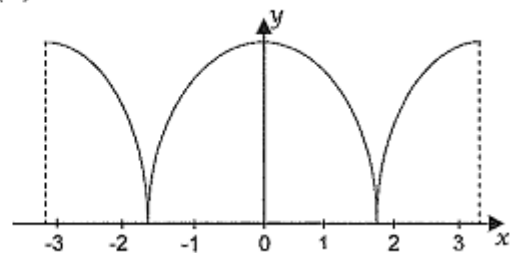
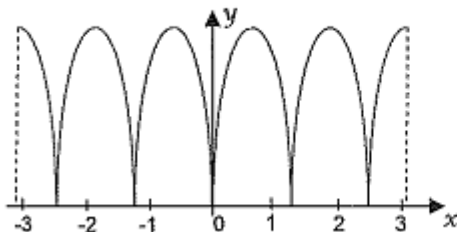
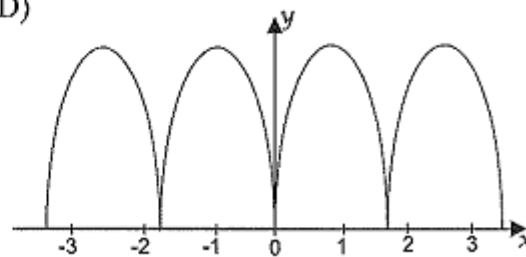
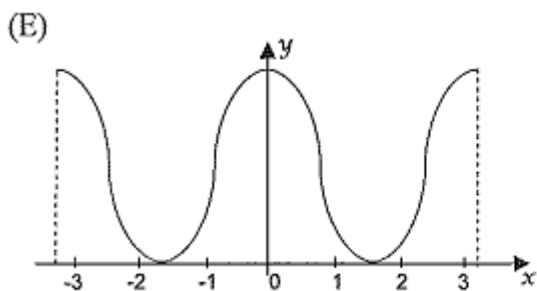
7) Sejam A a matriz quadrada de ordem 2 definida por $A=\begin{bmatrix}2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos(x+\pi)\\ \cos x & 1\end{bmatrix}$ e f a função real tal que $f(x)=\left|\det\left(A+A^T\right)\right|$, onde A^T representa a matriz transposta de A. O gráfico que melhor representa a função $y=f(x)$ no intervalo $-\pi\le x\le\pi$ é

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

RESPOSTA: D

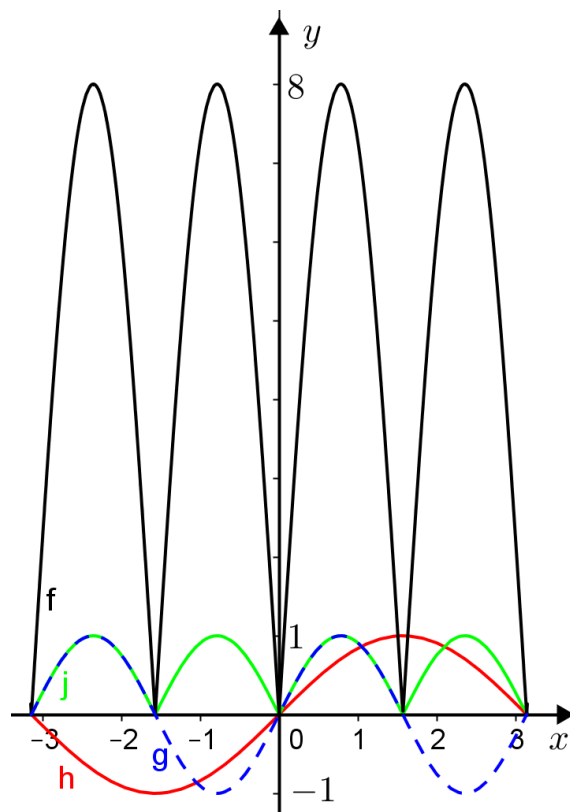
RESOLUÇÃO:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{sen} 2x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$A = \begin{bmatrix} 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) & \cos(x+\pi) \\ \cos x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\operatorname{sen} 2x & -\cos x \\ \cos x & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2\operatorname{sen} 2x & \cos x \\ -\cos x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + A^T = \begin{bmatrix} 4\operatorname{sen} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) = \left|\det\left(A + A^T\right)\right| = |8\operatorname{sen} 2x|$$

A função $f(x) = |8\operatorname{sen} 2x|$ tem imagem $[0, 8]$ e período $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Portanto, entre $-\pi$ e π temos dois períodos completos.

A construção do gráfico é feita sequencialmente:
1°) $h(x) = \text{sen}(x)$ (função básica)
2°) $g(x) = \text{sen}(2x)$ (reduz o período à metade)
3º) $j(x) = |\text{sen}(2x)|$ (parte negativa é espelhada para cima)
4°) $f(x) = 8 \cdot |\text{sen}(2x)| = |8\,\text{sen}(2x)|$ (imagem ampliada de $[0,1]$ para $[0,8]$)

8) Considere a função real de variável real $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Para que valore da constante real k, a equação $f(x) = k$ possui exatamente 3 raízes reais?

(A) $k < -\frac{1}{2}$

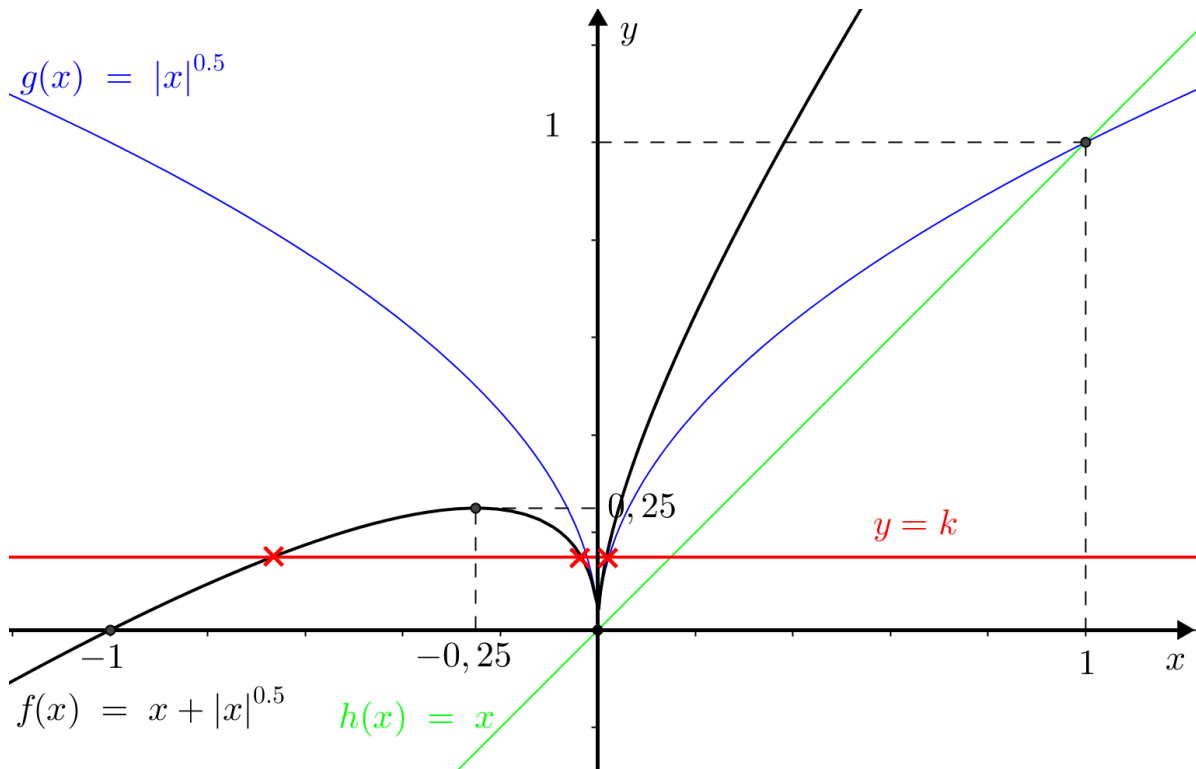
(B) $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$

(C) $k > \frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{4} < k < 0$

(E) $0 < k < \frac{1}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Vamos inicialmente esboçar o gráfico de $f(x) = x + \sqrt{|x|}$.

$$f(x) = x + \sqrt{|x|} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} = -x \Leftrightarrow |x| = (-x)^2 \wedge x \le 0 \Leftrightarrow -x = x^2 \wedge x \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \wedge x \le 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Raízes de f: x = 0 e x = −1

Estudo de sinal da 1ª derivada:

$$x < 0 : f(x) = x + \sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$x < -\frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

$$-\frac{1}{4} < x < 0 : f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

$$x > 0 : f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

Essas informações são suficientes para esboçarmos o gráfico acima, a menos da concavidade, o que para esse problema não é importante.

Para que a equação $f(x) = k$ possua exatamente três raízes reais, a reta y = k deve cortar o gráfico de f em exatamente três pontos. Isso ocorre para $0 < k < \frac{1}{4}$.

9) Um restaurante a quilo vende 200 quilos de comida por dia, a 40 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada aumento de um real no preço do quilo, o restaurante perde 8 clientes por dia, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida, em reais, para que o restaurante tenha a maior receita possível por dia?
(A) 52
(B) 51
(C) 46
(D) 45
(E) 42

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Vendendo 200 kg de comida a 40 reais o quilo, o número de clientes é $\frac{200}{0,5}=400$.

Seja $(40+n)$ o preço por quilo, onde $n\in\mathbb{N}$, então o número de clientes será $(400-8\cdot n)$ e a receita diária $R(n)=(400-8n)\cdot 0,5\cdot(40+n)=-4n^2+40n+8000$.
Para que a receita seja a maior o valor de n deve ser a abscissa do vértice do trinômio do 2º grau. Assim, temos: $n=\frac{-40}{2\cdot(-4)}=5$ e o valor do quilo de comida será $40+n=40+5=45$.

10) Sabendo que z é o número complexo $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, qual o menor inteiro positivo n, para o qual o produto $z\cdot z^2\cdot z^3\cdot\ldots\cdot z^n$ é um real positivo?
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$$
$$z\cdot z^2\cdot z^3\cdot\ldots\cdot z^n=z^{1+2+3+\ldots+n}=z^{\frac{n(n+1)}{2}}=1\cdot\text{cis}\left(\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=1\cdot\text{cis}\left(\frac{n(n+1)\cdot\pi}{6}\right)$$
Para que esse número seja um real positivo, o seu argumento deve ser um arco côngruo de 2π. Logo, o menor valor positivo de n para o qual isso ocorre é dado por $n(n+1)=12\Rightarrow n=3$.

11) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador. De quantos modos diferentes podemos distribuí-las entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?

(A) 288
(B) 1260
(C) 60800
(D) 80760
(E) 120960

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Para distribuir as 9 viagens entre 9 aspirantes, basta considerar os aspirantes em uma determinada ordem e permutar as viagens, observando que há repetição de elementos.

Assim, o número de modos de distribuir as viagens é $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$.

12) Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 4 & (16)^y & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix}$; $S = \begin{bmatrix} 1 & (4)^{(2y-1)} & 2^{-1} \\ 3^x & b & 1 \end{bmatrix}$ e $T = \begin{bmatrix} b & (2)^{(2y-1)} - 10 & c \\ 27 & 13 & -6 \end{bmatrix}$. A soma dos quadrados das constantes reais x, y, a, b, c que satisfazem à equação matricial $R - 6S = T$ é
(A) 23
(B) 26
(C) 29
(D) 32
(E) 40

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$A = R - 6S = \begin{bmatrix} -2 & (16)^y - 6\cdot(4)^{(2y-1)} & -4 \\ 9^x - 6\cdot 3^x & a - 6b & -6 \end{bmatrix}$$

$$R - 6S = T \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ (16)^y - 6\cdot(4)^{(2y-1)} = (2)^{(2y-1)} - 10 \Leftrightarrow y = 1 \\ c = -4 \\ 9^x - 6\cdot 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 2 \\ a - 6b = 13 \Rightarrow a - 6\cdot(-2) = 13 \Leftrightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$(16)^y - 6\cdot(4)^{(2y-1)} = (2)^{(2y-1)} - 10 \Leftrightarrow 16^y - 6\cdot 16^y \cdot \frac{1}{4} = 4^y \cdot \frac{1}{2} - 10 \Leftrightarrow \left(4^y\right)^2 + 4^y - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4^y = -5 \text{ (não convém)} \vee 4^y = 4 \Leftrightarrow y = 1$$

$9^x - 6\cdot 3^x = 27 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = -3\,(\text{não convém}) \vee 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 26$

13) Sabendo-se que f é uma função real de variável real, tal que a derivada segunda de f em x é $f''(x) = \cos^2 x + 1$ e que $f(0) = \frac{7}{8}$ e $f'(0) = 2$, o valor de $f(\pi)$ é

(A) $2\pi + \frac{11}{8}$

(B) $\pi^2 + \pi + \frac{5}{8}$

(C) $2\pi^2 + 5$

(D) $\frac{3\pi^2}{4} + 2\pi + \frac{7}{8}$

(E) $3\pi^2 + \pi + \frac{5}{8}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, devemos recordar as integrais $\int \cos kx dx = \frac{\text{sen}\, kx}{k} + c$ e $\int \text{sen}\, kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$.

$\cos^2 x + 1 = \frac{\cos 2x + 1}{2} + 1 = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}$

$f'(x) = \int f''(x) dx + c_0 = \int \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx + c_0 = \frac{\text{sen}\, 2x}{4} + \frac{3x}{2} + c_0$

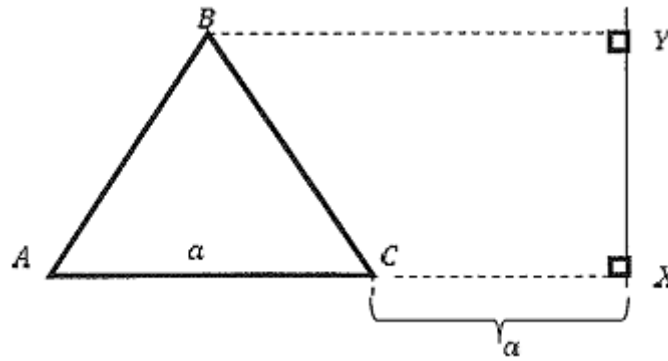
$f'(0) = 2 \Rightarrow f'(0) = \frac{\text{sen}\, 2\cdot 0}{4} + \frac{3\cdot 0}{2} + c_0 = 2 \Leftrightarrow c_0 = 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\text{sen}\, 2x}{4} + \frac{3x}{2} + 2$

$f(x) = \int f'(x) dx + c_1 = \int \left(\frac{\text{sen}\, 2x}{4} + \frac{3x}{2} + 2 \right) dx + c_1 = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{4} + 2x + c_1$

$f(0) = \frac{7}{8} \Rightarrow f(0) = -\frac{\cos 2\cdot 0}{8} + \frac{3\cdot 0^2}{4} + 2\cdot 0 + c_1 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow c_1 = 1$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{4} + 2x + 1$ e $\Rightarrow f(x) = -\frac{\cos 2\cdot \pi}{8} + \frac{3\cdot \pi^2}{4} + 2\cdot \pi + 1 = \frac{3\pi^2}{4} + 2\pi + \frac{7}{8}$

14) A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é

(A) $9\pi a^2$
(B) $9\sqrt{2}\pi a^2$
(C) $9\sqrt{3}\pi a^2$
(D) $6\sqrt{3}\pi a^2$
(E) $6\sqrt{2}\pi a^2$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
A superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY é formada por dois troncos de cone e uma coroa circular.
O tronco de cone interno tem raio menor a, raio maior $a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$ e geratriz a. Portanto, sua área é dada por $S_i=\pi\cdot a\cdot\left(\frac{3a}{2}+a\right)=\frac{5\pi a^2}{2}$.
O tronco de cone externo tem raio menor $a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$, raio maior 2a e geratriz a. Portanto, sua área é dada por $S_e=\pi\cdot a\cdot\left(2a+\frac{3a}{2}\right)=\frac{7\pi a^2}{2}$.
A coroa circular tem raio interno a e raio externo 2a. Portanto, sua área é dada por $S_c=\pi\left((2a)^2-a^2\right)=3\pi a^2$.
Logo, a área da superfície de revolução completa é $S_T=S_i+S_e+S_c=\frac{5\pi a^2}{2}+\frac{7\pi a^2}{2}+3\pi a^2=9\pi a^2$.

Alternativamente, poderíamos encontrar essa área utilizando o teorema de Papus-Guldin.
A distância do centroide da curva ao eixo XY é $\frac{a}{2}+a=\frac{3a}{2}$, o comprimento da curva é 3a, então a área da superfície de revolução é $S=2\pi\cdot\frac{3a}{2}\cdot 3a=9\pi a^2$.

15) Um recipiente cúbico de aresta 4 cm está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura de 3 cm. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. A tangente do ângulo α é

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

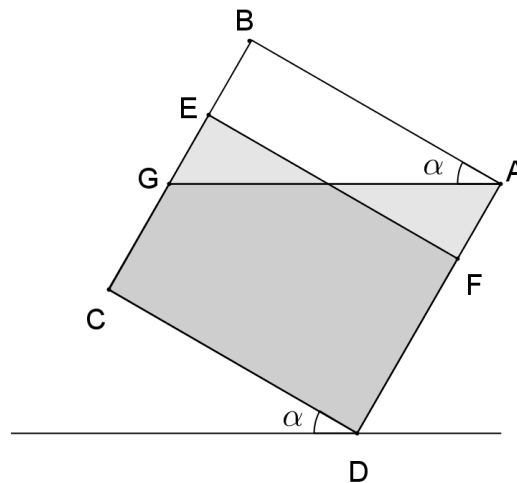
(B) $\sqrt{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$S_{CDEF} = S_{CDAG} \Rightarrow 4 \cdot 3 = \frac{(4 + CG) \cdot 4}{2} \Leftrightarrow CG = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{BG}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

16) O valor do produto $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$ é

(A) $-\frac{1}{8}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) -1

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$y = \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos\left(-20^\circ\right)$

$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,20^\circ\, y = -2\,\text{sen}\,20^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = -\text{sen}\,40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$

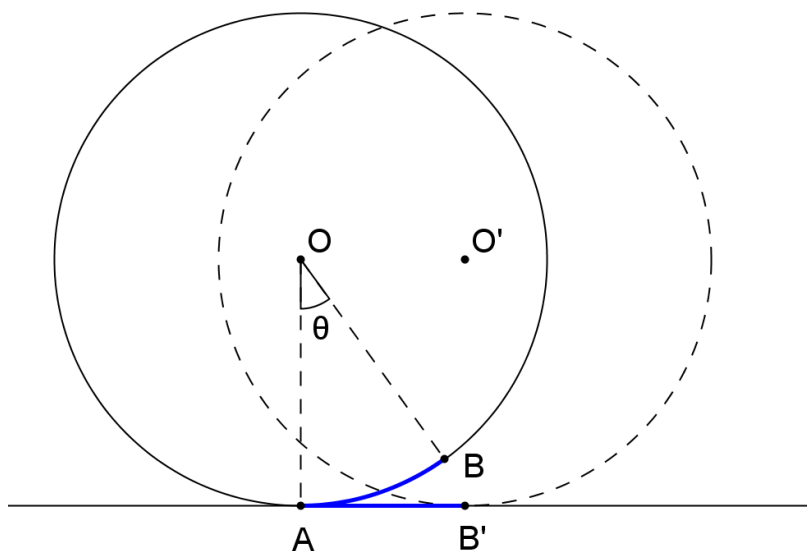
$\Leftrightarrow 4\,\text{sen}\,20^\circ\, y = -2\,\text{sen}\,40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = -\text{sen}\,80^\circ \cdot \cos 80^\circ$

$\Leftrightarrow 8\,\text{sen}\,20^\circ\, y = -2\,\text{sen}\,80^\circ \cdot \cos 80^\circ = -\text{sen}\,160^\circ = -\text{sen}\,20^\circ$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{8}$

17) Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é
(A) 0,1
(B) 0,2
(C) 0,3
(D) 0,6
(E) 0,8

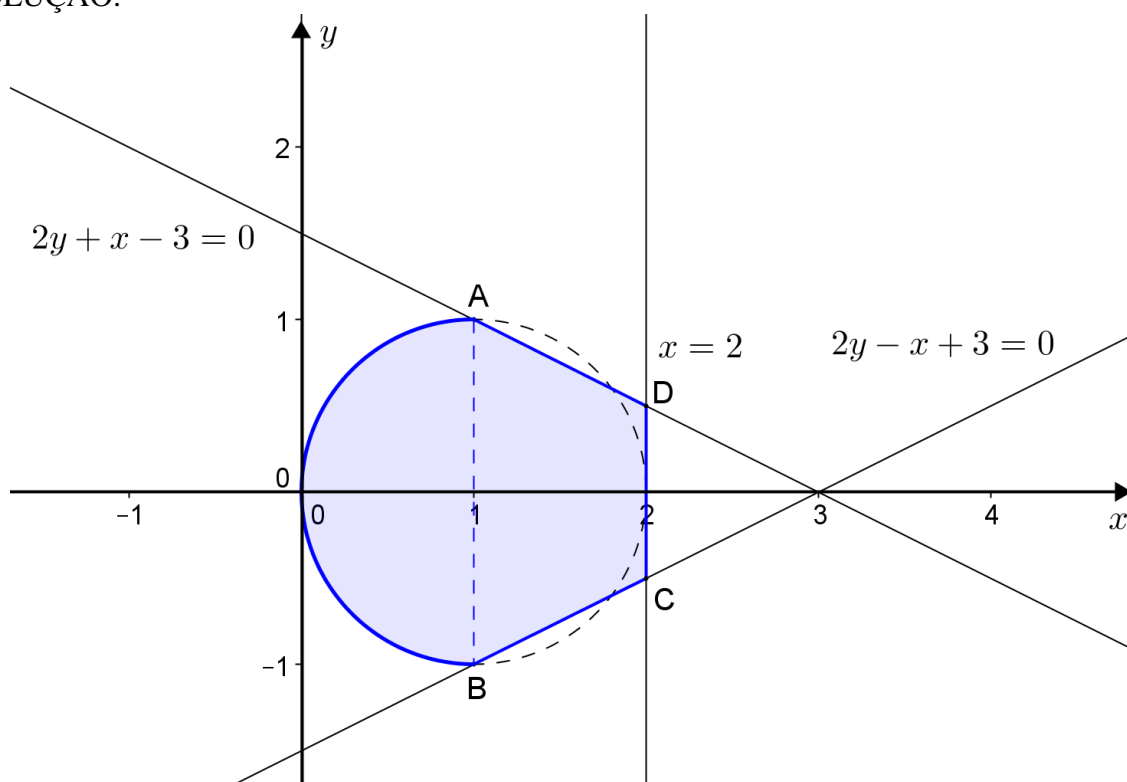
RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

O comprimento do arco de giro é $L = 30\text{ cm}$ e, seja θ o ângulo central de giro, então $L = r \cdot \theta \Leftrightarrow 30 = 50 \cdot \theta \Leftrightarrow \theta = 0{,}6\text{ rad}$, onde $r = 50\text{ cm}$ é o raio da roda.

18) Quantas unidades de área possui a região limitada pela curva de equação $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ e pelas retas $2y + x - 3 = 0$, $2y - x + 3 = 0$ e $x = 2$?
(A) $\pi + \dfrac{1}{2}$
(B) $\pi + \dfrac{3}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2}+1$
(D) $\pi+3$
(E) $\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$x=1-\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2}=1-x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$, onde $0 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$
Essa equação é representa o semicírculo indicado na figura.
As retas $2y+x-3=0$ e $2y-x+3=0$ passam pelas extremidades $A(1,1)$ e $B(1,-1)$ do semicírculo e são simétricas em relação ao eixo Ox. A reta x = 2 intercepta as outras duas nos pontos $C\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(2,\frac{1}{2}\right)$. As três retas e o diâmetro AB formam um trapézio isósceles.

A região limitada pela curva de equação $x=1-\sqrt{1-y^2}$ e pelas retas $2y+x-3=0$, $2y-x+3=0$ e $x=2$ é a união de um semicírculo de raio 1 e de um trapézio isósceles de bases $AB=2$, $CD=1$ e altura 2. Logo, sua área é dada por

$$S=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}+\frac{(2+1)\cdot 1}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}.$$

19) Sejam $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$ as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ que passam pelo ponto $P(0,0)$. O valor de $\left(m_1^2 + m_2^2\right)$ é

(A) 1

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

(E) $\frac{5}{2}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja a reta $y = mx$ que passa pelo ponto $P(0,0)$. Vamos identificar os valores de m para os quais há apenas um ponto de interseção entre a reta e a elipse $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$. Assim, temos:

$$x^2 + 4(mx)^2 - 16(mx) + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(4m^2 + 1\right)x^2 - 16mx + 12 = 0$$

Para que haja apenas um ponto de interseção, devemos ter $\Delta = 0$.

$$\Delta = (-16m)^2 - 4 \cdot \left(4m^2 + 1\right) \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow 64m^2 = 48 \Leftrightarrow m^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\left(m_1^2 + m_2^2\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

20) Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a 20 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de 12 cm desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é

(A) $6.000\pi^2$

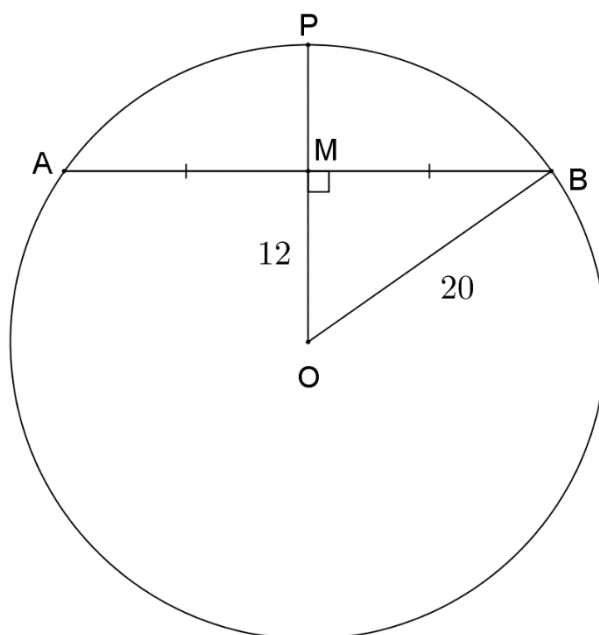
(B) $5.000\pi^2$

(C) $4.000\pi^2$

(D) $3.000\pi^2$

(E) $2.000\pi^2$

REPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Abaixo está a seção reta do sólido seccionado descrito no enunciado.

Seja $OP \perp AB$, então M é ponto médio de AB.
No triângulo retângulo OMB , temos: $MB^2 + 12^2 = 20^2 \Leftrightarrow MB = 16$.
Logo, $AB = 2 \cdot MB = 2 \cdot 16 = 32$.
A secção retangular do cilindro tem base de medida $AB = 32$ e altura igual à altura H do cilindro.
Como a área da secção retangular é igual à área da base do cilindro, temos:

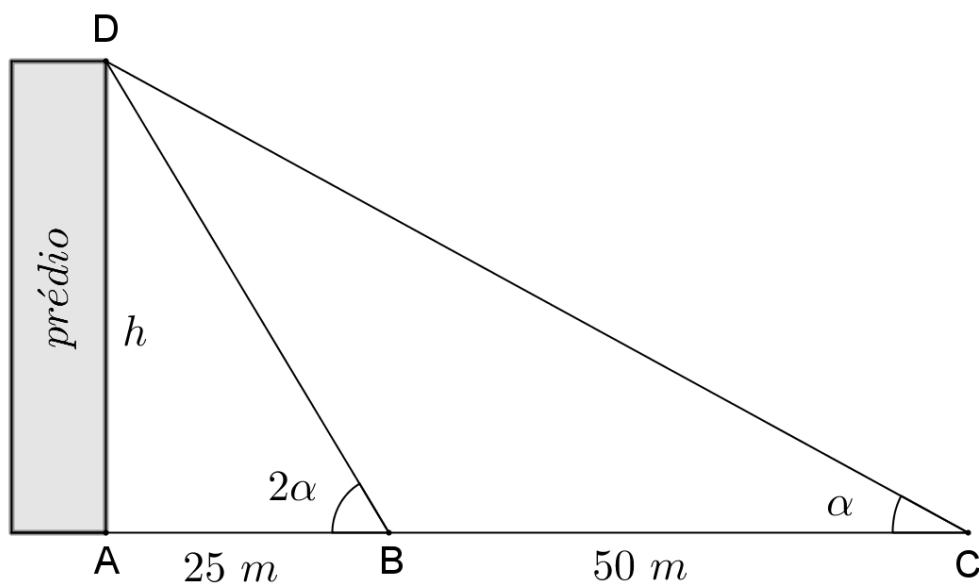
$$32 \cdot H = \pi \cdot 20^2 \Leftrightarrow H = \frac{25\pi}{2}.$$

Portanto, o volume do cilindro é $V_{cil.} = S_B \cdot H = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{25\pi}{2} = 5.000\pi^2 \text{ cm}^3$.

21) Um observador, de altura desprezível, situado a 25 m de um prédio, observa-o sob um certo ângulo de elevação. Afastando-se mais 50 m em linha reta, nota que o ângulo de visualização passa a ser a metade do anterior. Podemos afirmar que a altura, em metros, do prédio é

(A) $15\sqrt{2}$
(B) $15\sqrt{3}$
(C) $15\sqrt{5}$
(D) $25\sqrt{3}$
(E) $25\sqrt{5}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Na figura, temos $\text{tg}\,2\alpha = \frac{h}{25}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{75}$.

Como $\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}$, então temos:

$$\frac{h}{25} = \frac{2\cdot\frac{h}{75}}{1-\left(\frac{h}{75}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{25} = \frac{\frac{2}{75}}{1-\frac{h^2}{75^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{25} = \frac{2}{75}\cdot\frac{75^2}{75^2-h^2} \Leftrightarrow 75^2 - h^2 = 150\cdot 25 \Leftrightarrow h^2 = 1875$$

$$\Leftrightarrow h = 25\sqrt{3}\ \text{m}$$

22) A equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3,3)$ e $(-3,3)$ é

(A) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$

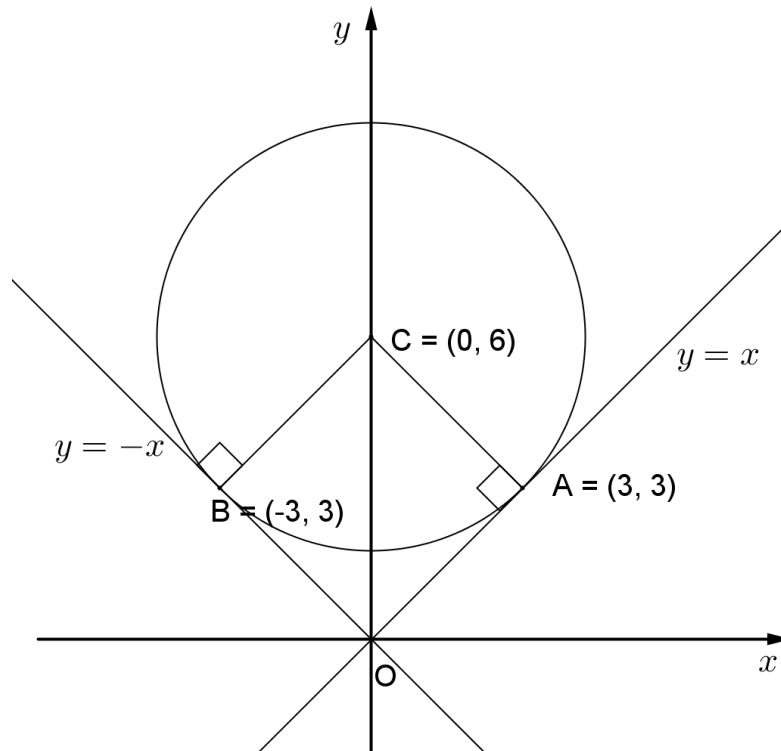
(B) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$

(D) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$

(E) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O centro C da circunferência está no encontro da perpendicular a $y = x$ em $A = (3,3)$ com a perpendicular a $y = -x$ em $B = (-3,3)$.

Como $OA = OB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, então o quadrilátero ABCD é um quadrado. Assim, $OC = AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (3-3)^2} = 6$ e, pela simetria da figura, a abscissa de C é 0.

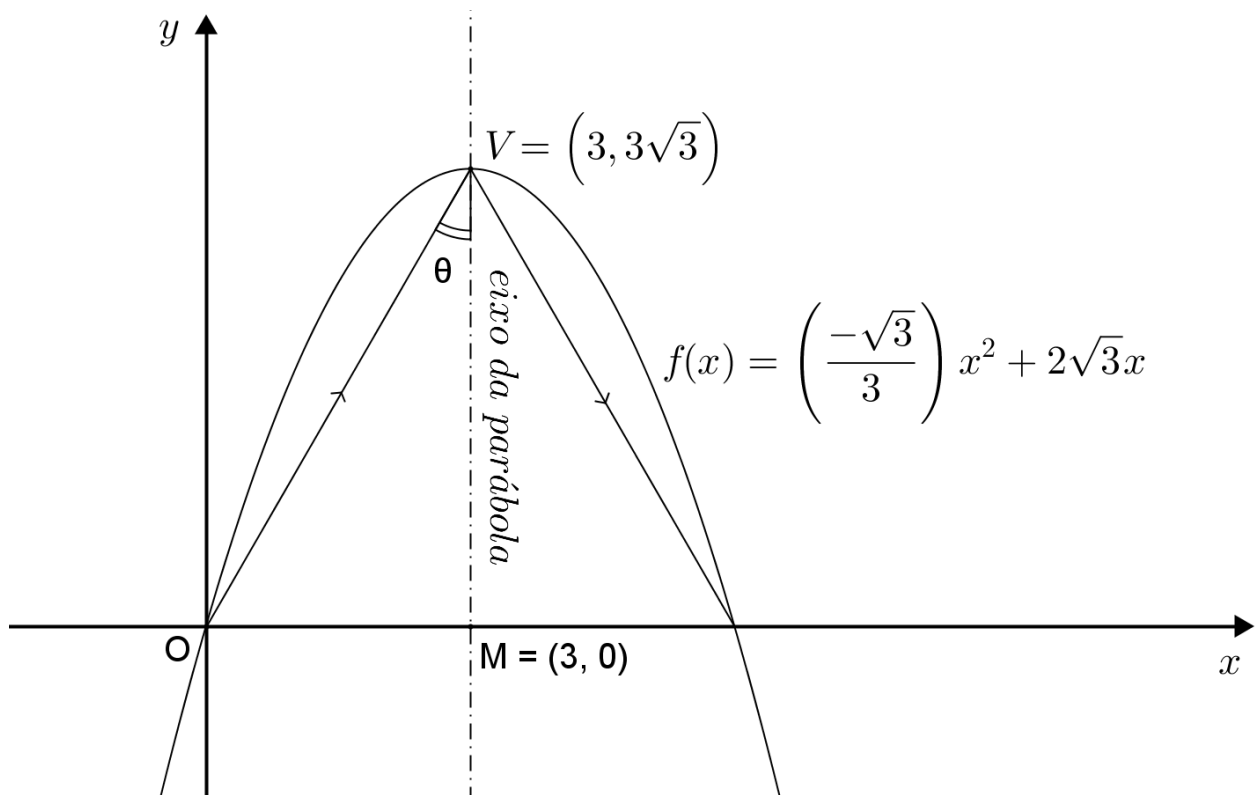
Portanto, a circunferência tem centro $C = (0,6)$, raio $CA = CB = 3\sqrt{2}$ e sua equação é $(x-0)^2 + (y-6)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$.

23) Uma bolinha de aço é lançada a partir da origem e segue uma trajetória retilínea até atingir o vértice de um anteparo parabólico representado pela função real de variável real $f(x) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)x^2 + 2\sqrt{3}x$. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória retilínea é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola. Qual é o ângulo de incidência (ângulo entre a trajetória e o eixo da parábola)?

(A) 30º
(B) 45º
(C) 60º
(D) 75º
(E) 90º

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

O vértice da parábola é dado por $x_V = \frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)} = 3$ e $y_V = f(3) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 3^2 + 2\sqrt{3}\cdot 3 = 3\sqrt{3}$.

O ângulo entre a trajetória e o eixo da parábola é tal que $\text{tg}\,\theta = \frac{OM}{MV} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$.

24) A soma das coordenadas do ponto $A \in \mathbb{R}^3$ simétrico ao ponto $B = (x, y, z) = (1, 4, 2)$ em relação ao plano π de equação $x - y + z - 2 = 0$ é
(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 9
(E) 10

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Para que $A = (x_A, y_A, z_A)$ seja simétrico de $B = (1, 4, 2)$, devemos ter $AB \perp \pi$ e o ponto médio M de AB deve pertencer a π.

$AB \perp \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel n_{\pi} \Leftrightarrow (x_A - 1, y_A - 4, z_A - 2) \parallel (1, -1, 1) \Leftrightarrow \frac{x_A - 1}{1} = \frac{y_A - 4}{-1} = \frac{z_A - 2}{1} = t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = t + 1 \\ y_A = -t + 4 \\ z_A = t + 2 \end{cases}$

Notem que esse resultado é equivalente a afirmar que o ponto A está sobre uma reta perpendicular a π e que passa por $B = (1, 4, 2)$.

$M = \left(\frac{x_A + 1}{2}, \frac{y_A + 4}{2}, \frac{z_A + 2}{2} \right) \in \pi \Rightarrow \left(\frac{x_A + 1}{2} \right) - \left(\frac{y_A + 4}{2} \right) + \left(\frac{z_A + 2}{2} \right) - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A - y_A + z_A = 5$

Substituindo as expressões obtidas anteriormente para x_A, y_A e z_A, temos:

$(t + 1) - (-t + 4) + (t + 2) = 5 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$.

Portanto, $A = (3, 2, 4)$ cuja soma das coordenadas é $3 + 2 + 4 = 9$.

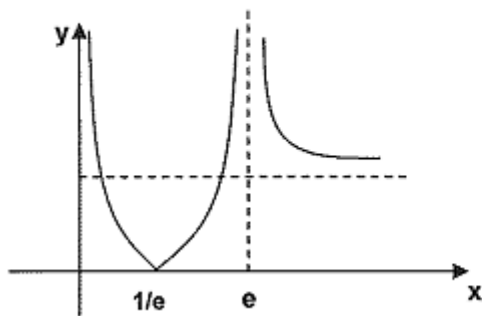
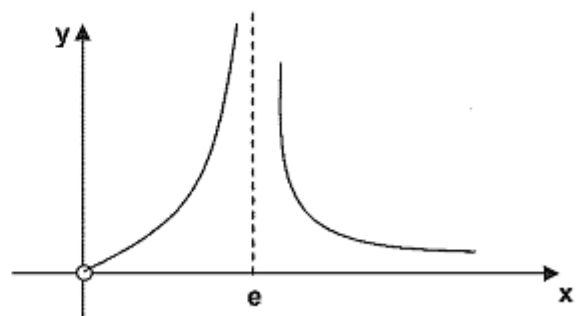
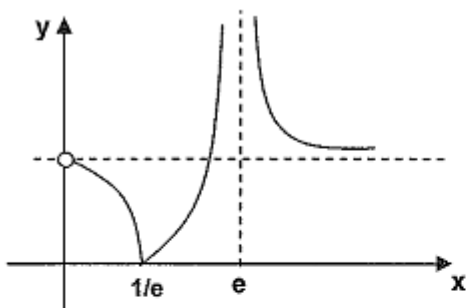
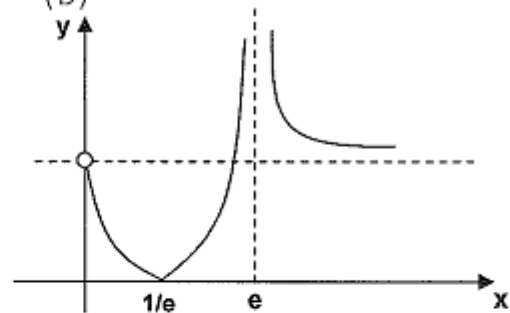
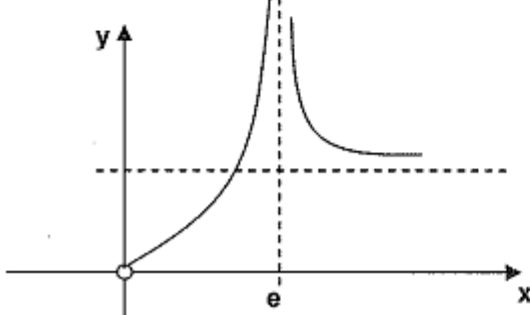
25) Para lotar o Maracanã na final do campeonato Sul Americano, planejou-se inicialmente distribuir os 60.000 ingressos em três grupos da seguinte forma: 30% seriam vendidos para a torcida organizada local; 10% seriam vendidos para a torcida organizada do time rival e os restantes para espectadores não filiados às torcidas. Posteriormente, por motivos de segurança, os organizadores resolveram que 9.000 destes ingressos não seriam mais postos à venda, cancelando-se então 3.000 ingressos destinados a cada um dos três grupos. Qual foi aproximadamente o percentual de ingressos destinados a espectadores não filiados às torcidas após o cancelamento dos 9.000 ingressos?
(A) 64,7%
(B) 60%
(C) 59%
(D) 58,7%
(E) 57,2%

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, seriam vendidos $30\% \cdot 60000 = 18.000$ ingressos para a torcida organizada local, $10\% \cdot 60000 = 6.000$ para a torcida organizada rival e $60\% \cdot 60000 = 36.000$ para espectadores não filiados às torcidas.
Após o cancelamento dos 9.000 ingressos, o total de ingressos passou a ser $60000 - 9000 = 51.000$ e a quantidade destinada a espectadores não filiados às torcidas passou a ser $36000 - 3000 = 33.000$ que representa $\frac{33.000}{51.000} \cdot 100\% \approx 64,7\%$ do total de ingressos.

26) O gráfico que melhor representa a função real de variável real $f(x) = \left| \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \right|$ é

(B)

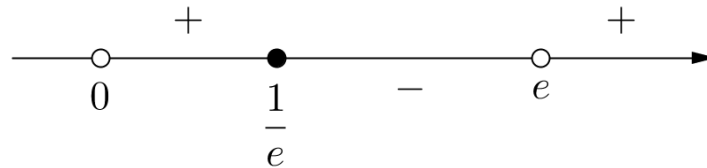
(C)

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$$

Determinação do domínio de f:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e \end{cases} \Rightarrow D_f =]0,e[\cup]e,+\infty[$$

Vamos fazer um estudo de sinal de $y=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

Assim, temos:

$$x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[\Rightarrow y > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

$$x \in \left[\frac{1}{e}, e\right[\Rightarrow y < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + 1}{1 - \ln x}$$

Determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

A primeira derivada de $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ é $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1) - (\ln x + 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$.

$$\begin{cases} x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente} \\ x \in \left[\frac{1}{e}, e\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(\ln x - 1)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente} \end{cases}$$

Logo, $x = \frac{1}{e}$ é um ponto de mínimo local.

Determinação dos limites nas extremidades do domínio e no ponto de descontinuidade.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to e} f(x) = \lim_{x \to e} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}\right) = 1$$

Determinação da concavidade:

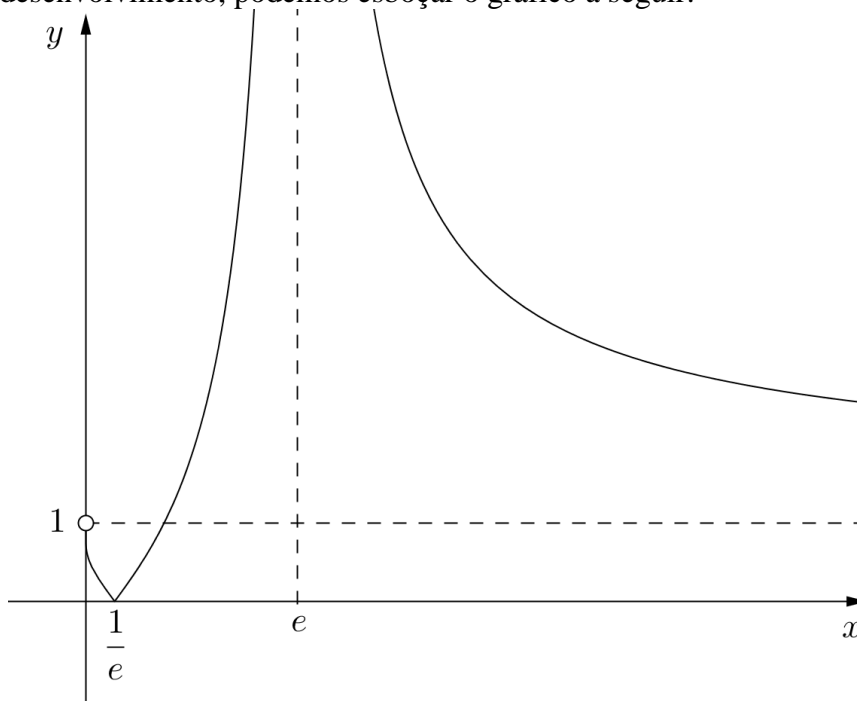
$$x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(-2)\left[(\ln x - 1)^2 + x \cdot 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x}\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} = \frac{2\left[(\ln x)^2 - 1\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} > 0$$

Note que, se $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[$, então $(\ln x)^2 - 1 > 0$.

$$x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(\ln x - 1)^2} > 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{-2\left[(\ln x)^2 - 1\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} > 0$$

Como a derivada segunda é positiva em todo o domínio, então a concavidade do gráfico é sempre para cima.

Com base nesse desenvolvimento, podemos esboçar o gráfico a seguir:

Analisando os resultados obtidos, conclui-se que a melhor alternativa é a letra D.

27) Qual a quantidade de números inteiros de 4 algarismos distintos, sendo dois algarismos pares e dois ímpares que podemos formar, usando os algarismos de 1 a 9?

(A) 2400
(B) 2000
(C) 1840
(D) 1440
(E) 1200

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Nos algarismos de 1 a 9, há 5 algarismos ímpares e 4 pares. Devemos escolher 2 dos 5 algarismos ímpares e 2 dos 4 algarismos pares e depois permutá-los.

Assim, a quantidade de números é dada por $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 4! = 1440$.

28) Considere as funções reais $f(x) = \frac{x}{2} - \ln x$ e $g(x) = \frac{x}{2} - (\ln x)^2$ onde ln x expressa o logaritmo de x na base neperiana e $(e \cong 2,7)$. Se P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, podemos afirmar que o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é

(A) $\frac{e+1}{2(e-3)}$

(B) $e+1$

(C) $\frac{e-1}{2(e+1)}$

(D) $2e+1$

(E) $\frac{e-3}{2(e-1)}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \ln x = \frac{x}{2} - (\ln x)^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e^0 = 1 \vee x = e^1 = e$$

Assim, os pontos de interseção dos gráficos são, a menos da ordem, $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $Q = \left(e, \frac{e}{2} - 1\right)$, e a reta que passa por esses pontos tem coeficiente angular $\frac{\left(\frac{e}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}}{e-1} = \frac{e-3}{2(e-1)}$.

29) Se $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z, então o número de soluções da equação $z^2 = \bar{z}$ é

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, então $\bar{z} = x - yi$.

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^2 = x - yi \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x - yi \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = x - yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ \wedge \\ 2xy = -y \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y=0 \Rightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=1$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, o conjunto solução da equação é $S=\left\{0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ e a equação possui 4 soluções.

30) Considere a função real de variável real $y=f(x)$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, cujo gráfico contém o ponto $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$. Se $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\text{sen}\,x\cdot\cos x$, então $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é igual a

(A) $-\sqrt{3}+\frac{1}{8}$

(B) $\frac{9}{8}$

(C) $\frac{7}{8}$

(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}$

(E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{4}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\text{sen}\,x\cdot\cos x=\sec^2 x+\frac{\text{sen}\,2x}{2}$

$f(x)=\int f'(x)dx + C = \int\left(\sec^2 x+\frac{\text{sen}\,2x}{2}\right)dx + C = \text{tg}\,x - \frac{\cos 2x}{4} + C$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{3}+C=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+C=\sqrt{3} \Leftrightarrow C=-\frac{1}{8}$

$\Rightarrow f(x)=\text{tg}\,x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\text{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}=1-\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

31) O quinto termo da progressão aritmética $3-x; -x; \sqrt{9-x}; \ldots$, $x\in\mathbb{R}$, é

(A) 7

(B) 10

(C) -2

(D) $-\sqrt{14}$

(E) -18

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\text{PA}: 3-x; -x; \sqrt{9-x}; \ldots \Leftrightarrow 2\cdot(-x)=(3-x)+\sqrt{9-x} \Leftrightarrow \sqrt{9-x}=-x-3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9-x}\right)^2=(-x-3)^2 \ \wedge\ 9-x\geq 0 \ \wedge\ -x-3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9-x=x^2+6x+9 \ \wedge\ x\leq 9 \ \wedge\ x\leq -3$$

$$\Leftrightarrow x^2+7x=0 \ \wedge\ x\leq -3$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \ \vee\ x=-7) \ \wedge\ x\leq -3$$

$$\Leftrightarrow x=-7$$

Substituindo o valor obtido para x nos primeiros termos da P.A., temos:
PA: 10; 7; 4; ...
Trata-se de uma P.A. de primeiro termo $a_1=10$ e razão $r=-3$.
Portanto, o quinto termo da P.A. é $a_5=-2$.

32) Após acionado o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por $Q(t)=Q_0\cdot\left(1-e^{\frac{-t}{2}}\right)$, onde Q_0 é a capacidade limite de carga e t é medido em segundos. Qual o tempo, em segundos, para recarregar o capacitor de 90% da sua capacidade limite?
(A) ln 10
(B) $\ln(10)^2$
(C) $\sqrt{\ln 10}$
(D) $\sqrt{(\ln 10)^{-1}}$
(E) $\sqrt{\ln(10)^2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Devemos encontrar o valor de t tal que $Q(t)=90\%\cdot Q_0=0,9\cdot Q_0$.

$$Q(t)=Q_0\cdot\left(1-e^{\frac{-t}{2}}\right) \Rightarrow 0,9\cdot Q_0=Q_0\cdot\left(1-e^{\frac{-t}{2}}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{2}}=0,1 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}}=10 \Leftrightarrow \frac{t}{2}=\ln 10$$

$$\Leftrightarrow t=2\cdot\ln 10=\ln(10)^2$$

33) Há 10 postos de gasolina em uma cidade. Desses 10, exatamente dois vendem gasolina adulterada. Foram sorteados aleatoriamente dois desses 10 postos para serem fiscalizados. Qual é a probabilidade de que os dois postos infratores sejam sorteados?

(A) $\frac{1}{45}$
(B) $\frac{1}{90}$
(C) $\frac{1}{15}$
(D) $\frac{2}{45}$
(E) $\frac{1}{30}$

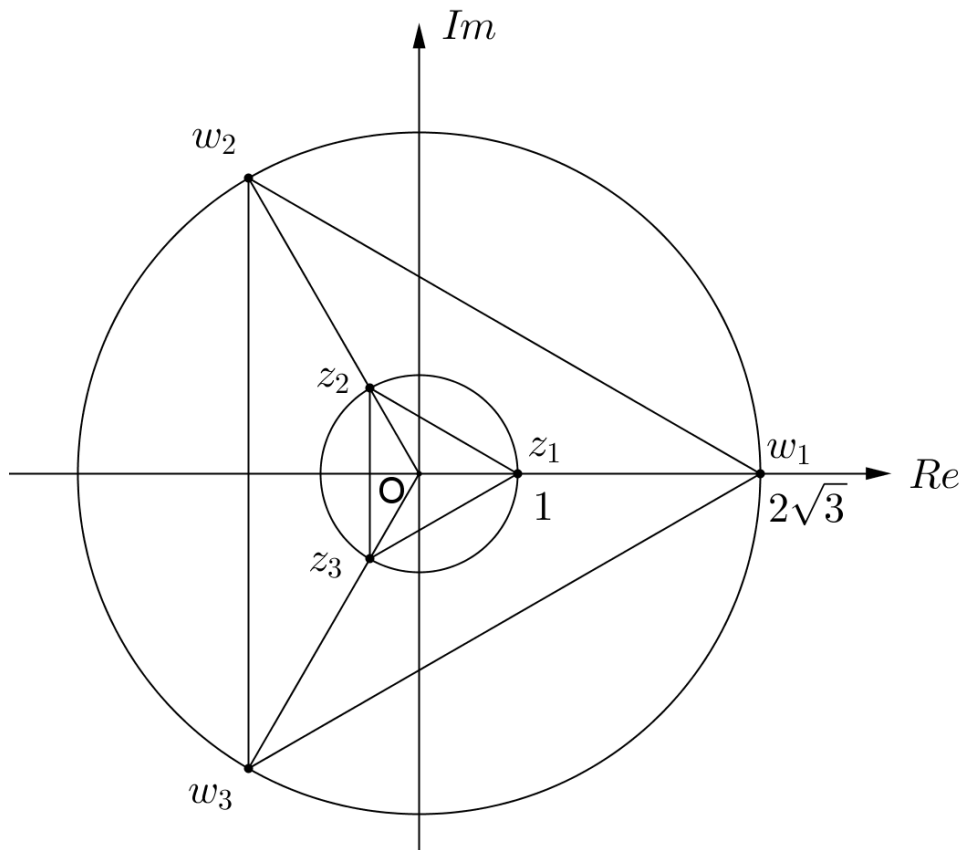
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
O número de elementos do espaço amostral é $\#(\Omega) = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$ e o número de casos favoráveis é $\#(A) = 1$.
Como os eventos são equiprováveis, a probabilidade pedida é $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{1}{45}$.

34) Desenha-se no plano complexo o triângulo T com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos z_1, z_2, z_3, que são raízes cúbicas da unidade. Desenha-se o triângulo S, com vértices nos pontos correspondentes aos números complexos w_1, w_2, w_3, que são raízes cúbicas de $24\sqrt{3}$. Se A é a área de T e B é a área de S, então
(A) $B = 12A$
(B) $B = 18A$
(C) $B = 24A$
(D) $B = 36A$
(E) $B = 42A$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Os números complexos z_1, z_2, z_3 são as raízes da equação $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1\text{cis}\frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2$.
Os números complexos w_1, w_2, w_3 são as raízes da equação $w^3 = 24\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}\right)^3 \Leftrightarrow w = 2\sqrt{3}\text{cis}\frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2$.
Assim, os números complexos z_1, z_2, z_3 são vértices de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio 1 e os números complexos w_1, w_2, w_3 são vértices de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio $2\sqrt{3}$.

Sabendo que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos: $\frac{A}{B} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow B = 12A$.

Observe que a razão de semelhança pode ser obtida pela razão entre quaisquer linhas homólogas nos dois triângulos. Nesse caso, utilizamos a razão entre os raios dos círculos circunscritos aos triângulos.

35) A concentração de um certo remédio no sangue, t horas após sua administração, é dada pela fórmula $y(t) = \frac{10t}{(t+1)^2}$, $t \geq 0$. Em qual dos intervalos abaixo a função $y(t)$ é crescente?

(A) $t \geq 0$
(B) $t > 10$
(C) $t > 1$
(D) $0 \leq t < 1$
(E) $\frac{1}{2} < t < 10$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Para que a função seja crescente em um intervalo, sua derivada naquele intervalo deve ser positiva.

$$y(t)=\frac{10t}{(t+1)^2}\Rightarrow y'(t)=\frac{10\cdot(t+1)^2-10t\cdot 2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{10\left(1-t^2\right)}{(t+1)^4}>0\Leftrightarrow -1<t<1$$

Mas é dado que $t\geq 0$, então a função $y(t)$ é crescente em $0\leq t<1$.

36) Sabendo que a é uma constante real e que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e$ então o valor da constante a é

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{2ax}{x-a}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{2a}{1-\frac{a}{x}}}=$$

$$=e^{2a}=e\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

37) Seja π um dos planos gerados pelos vetores $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{w}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. Considere $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, um vetor unitário do plano π e na direção da reta bissetriz entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. O valor de $2a^2+b^2+c^2$ é

(A) $\frac{10}{9}$

(B) $\frac{9}{8}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 1

(E) $\frac{11}{10}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Se $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é um vetor unitário, então $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$.

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2a - 2b + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2a - 2b + c}{3}$$

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{-a + 2b + 2c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-a + 2b + 2c}{3}$$

Se $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ está na direção da bissetriz dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \cos(\vec{u} \wedge \vec{w}) \Leftrightarrow \frac{2a - 2b + c}{3} = \frac{-a + 2b + 2c}{3} \Leftrightarrow 3a - 4b - c = 0 \quad (*)$$

Se $\vec{u} \in \pi$, então os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, o que implica que o produto misto desses três vetores é nulo. Assim,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6a - 5b + 2c = 0 \quad (**)$$

Resolvendo o sistema formado por (*) e (**), $\begin{cases} 3a - 4b = c \\ 6a + 5b = 2c \end{cases}$, temos $b = 0$ e $a = \frac{c}{3}$.

Portanto, $\vec{u} = a\vec{i} + 3a\vec{k}$ e, como é unitário, temos $\sqrt{a^2 + 0^2 + (3a)^2} = 1 \Leftrightarrow 10a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{10}$.

Logo, $2a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + a^2 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$.

38) Considere a função real $f(x) = x^2 e^x$. A que intervalo pertence a abscissa do ponto de máximo local de f em $]-\infty, +\infty[$?

(A) $[-3, -1]$

(B) $[-1, 1[$

(C) $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

(D) $]1, 2]$

(E) $]2, 4]$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$f(x) = x^2 e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$

Identificação dos pontos críticos: $f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$.

Teste da 2^a derivada: $f''(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$f''(0) = (0^2 + 4 \cdot 0 + 2) \cdot e^0 = 2 > 0 \Rightarrow$ ponto de mínimo loca

$f''(-2)=\left((-2)^2+4\cdot(-2)+2\right)\cdot e^{-2}=\frac{-2}{e^2}<0 \Rightarrow$ ponto de máximo local

Portanto, o ponto de abscissa $-2\in[-3,-1]$ é um ponto de máximo local finito.

39) O valor de $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{2x}$ é

(A) $-\infty$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) 1

(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{sen} x)-(1-\operatorname{sen} x)}{2x\cdot\left(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x}{2x\cdot\left(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}\cdot\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}$$

Note que usamos o limite trigonométrico fundamental $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

40) Seja $\vec{u}$ um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}=4\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ e $\vec{w}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Se o produto escalar de $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ é igual a -1, podemos afirmar que a soma das componentes de $\vec{u}$ é

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) $-\frac{1}{2}$

(E) -1

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Se $\vec{u}$ é ortogonal aos vetores $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, então $\vec{u}$ é paralelo ao vetor

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$$. Portanto, $\vec{u} = a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}$, $a \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -1 \Leftrightarrow (a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -1 \Leftrightarrow a - a - a = -1 \Leftrightarrow a = 1$.

Assim, $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ e a soma de suas componentes é $1 + (-1) + (-1) = -1$.

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2013/2014

1) A soma das raízes reais distintas da equação $||x-2|-2|=2$ é igual a
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$||x-2|-2|=2 \Leftrightarrow |x-2|-2=\pm 2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} |x-2|=4 \Leftrightarrow x-2=\pm 4 \Leftrightarrow x=6 \vee x=-2 \\ \vee \\ |x-2|=0 \Leftrightarrow x=2 \end{array} \right.$$

Assim, o conjunto solução é $S=\{-2,2,6\}$ e a soma das raízes reais distintas é $(-2)+2+6=6$.

2) A equação $4x^2-y^2-32x+8y+52=0$, no plano xy, representa
(A) duas retas
(B) uma circunferência
(C) uma elipse
(D) uma hipérbole
(E) uma parábola

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$4x^2-y^2-32x+8y+52=0 \Leftrightarrow 4(x^2-8x+16)-(y^2-8y+16)=-52+64-16$$

$$\Leftrightarrow 4(x-4)^2-(y-4)^2=-4 \Leftrightarrow \frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{1}=1$$

A equação acima representa uma hipérbole de eixo real vertical, centro $(4,4)$, semieixo real $a=2$ e semieixo imaginário $b=1$.

3) Considere f e g funções reais de variável real definidas por, $f(x)=\frac{1}{4x-1}$ e $g(x)=2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(f \circ g)(x)$?
(A) $\mathbb{R}$
(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4},\ x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4},\ x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{4 \cdot g(x) - 1} \Rightarrow 4g(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow g(x) \neq \frac{1}{4}$$

$$g(x) \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$D_{(f \circ g)} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \wedge x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$$

4) Considerando que a função $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, é inversível, o valor de $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ é

(A) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

(B) $-\frac{4}{25}$

(C) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

(E) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\theta = \arccos\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{5} \ \wedge \ \theta \in [0, \pi]$$

$$\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \geq 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{tg}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)=\text{tg}\,\theta=\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

5) Sabendo que a função real $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x<0\\ \frac{x^2+x-a}{x+2} & \text{se} \quad x\geq 0\end{cases}$ é contínua em x = 0, $x\in\mathbb{R}$, qual é o valor de $\frac{a}{b}$, onde $b=\frac{f^2(0)}{4}$?

(A) 8
(B) 2
(C) 1
(D) $-\frac{1}{4}$
(E) –8

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se a função f é contínua em x = 0, então $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Portanto, devemos ter $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)=1$$

Observe que, quando $x\to 0-$, $\frac{1}{x}\to-\infty$ e $e^{\frac{1}{x}}\to 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$, temos: $f(0)=\frac{0^2+0-a}{0+2}=1\Leftrightarrow a=-2$.

Vamos conferir o valor do limite à direita: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{x^2+x+2}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{x^2+x+2}{x+2}\right)=\frac{2}{2}=1$.

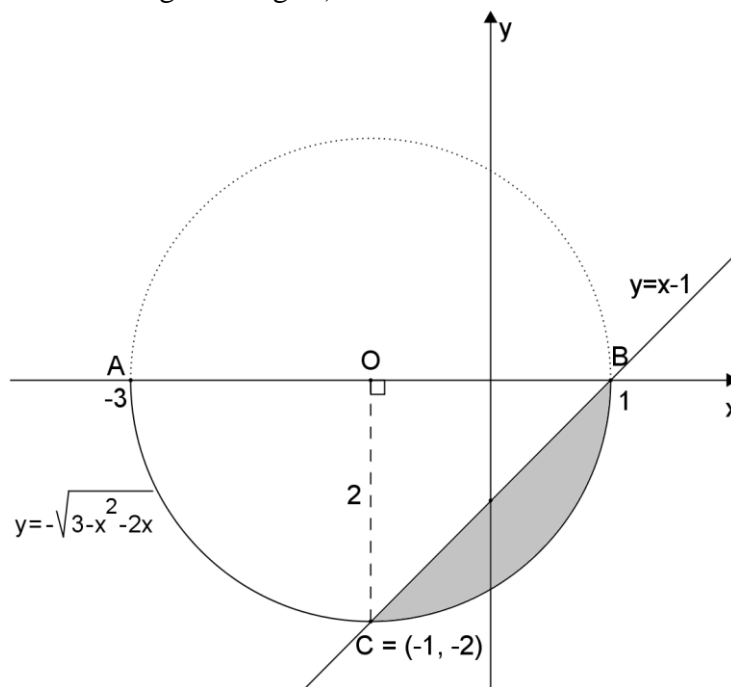
Portanto, $b=\frac{f^2(0)}{4}=\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4}$ e $\frac{a}{b}=\frac{-2}{1/4}=-8$.

6) Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y=-\sqrt{3-x^2-2x}$ e a reta $y=x-1$?

(A) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$

(B) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$
(C) $3\pi+2$
(D) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
(E) $\pi-2$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Analisando a equação $y=-\sqrt{3-x^2-2x}$, observamos que devemos ter $-x^2-2x+3\geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1$ e $y\leq 0$.
Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:
$y^2=\left(-\sqrt{3-x^2-2x}\right)^2 \Leftrightarrow y^2=3-x^2-2x \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=3+1 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=2^2$
Logo, a equação $y=-\sqrt{3-x^2-2x}$ representa uma semicircunferência de centro $O(-1,0)$ e raio 2 (indicada pela linha contínua na figura a seguir).

A reta $y=x-1$ corta a circunferência nos pontos $B(1,0)$ e $C(-1,-2)$.
Assim, a região plana limitada pelas duas curvas é um segmento circular de 90º em uma circunferência de raio 2.

Portanto, a área pedida é igual a $S=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}-\frac{2\cdot 2}{2}=(\pi-2)$ u.a..

7) As equações simétricas da reta de interseção dos planos $2x-y-3=0$ e $3x+y+2z-1=0$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, são

(A) $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{2-z}{5}$

(B) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{5}$

(C) $x=\frac{y+3}{2}=\frac{2-z}{4}$

(D) $x-1=\frac{3-y}{2}=\frac{z-2}{4}$

(E) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{5}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Vamos escrever x em função de y e z.

$$\begin{cases}3x+y+2z=1\\2x-y=3\end{cases}$$

$$(3x+y+2z)+(2x-y)=1+3 \Leftrightarrow 5x+2z=4 \Leftrightarrow 5x=4-2z \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{z-2}{-5}$$

$$2x=y+3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}$$

Igualando as expressões obtidas, temos: $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-5}$ que é a equação simétrica da reta interseção dos dois planos.
Alternativamente, poderíamos resolver o problema como segue:
As equações dos dois planos formam um sistema possível e indeterminado. Vamos adotar a variável x = t como parâmetro.

$$\begin{cases}3x+y+2z=1\\2x-y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=1-3t\\y=-3+2t\\x=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=2-\frac{5}{2}t\\y=-3+2t\\x=t\end{cases}$$

A última expressão representa a equação paramétrica da reta interseção dos dois planos. Para obtermos a equação simétrica dessa reta, basta observarmos nas equações paramétricas que a reta passa pelo ponto $(0,-3,2)$ e tem vetor diretor $\left(1,2,-\frac{5}{2}\right)$ que pode ser multiplicado por 2, resultando $(2,4,-5)$.
Dessa forma, a equação simétrica da reta é $\frac{x-0}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-5}$ que é equivalente a $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{2-z}{5}$
.
Essa equação também poderia ser obtida isolando o parâmetro t em cada uma das expressões e igualando-as. Assim, $t=x=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{-5/2}$ e, multiplicando todos os denominadores por 2, temos $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{2-z}{5}$.

8) Sejam $F(x)=x^3+ax+b$ e $G(x)=2x^2+2x-6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a+b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Se a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ é exata, então existe $q(x)$ do 1º grau tal que

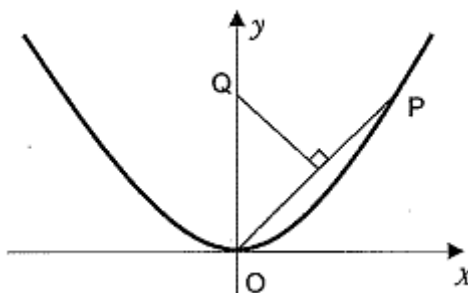
$$\frac{F(x)}{G(x)}=q(x) \Leftrightarrow F(x)=G(x)\cdot q(x).$$

Seja $q(x)=cx+d$, temos:

$$x^3+ax+b=(2x^2+2x-6)(cx+d)=2cx^3+(2c+2d)x^2+(2d-6c)x-6d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=2c \Leftrightarrow c=1/2 \\ 0=2c+2d \Leftrightarrow d=-c=-1/2 \\ a=2d-6c=2\cdot(-1/2)-6\cdot(1/2)=-4 \\ b=-6d=-6\cdot(-1/2)=3 \end{cases}$$

Logo, $a+b=(-4)+3=-1$.

9) A figura abaixo mostra um ponto $P \neq O$, O origem, sobre a parábola $y=x^2$ e o ponto Q, interseção da mediatriz do segmento OP com o eixo y. A medida que P tende à origem ao longo da parábola, o ponto Q se aproxima do ponto

(A) $(0,0)$
(B) $\left(0,\frac{1}{8}\right)$
(C) $\left(0,\frac{1}{6}\right)$

(D) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

(E) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$P\left(k, k^2\right)$

Seja M o ponto médio de OP, então $M\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}\right)$.

O coeficiente angular de OP é $m_{OP} = \frac{k^2 - 0}{k - 0} = k$.

Como $MQ \perp OP$, então o coeficiente angular de MQ é $m_{MQ} = -\frac{1}{k}$.

A reta suporte de MQ passa por $M\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}\right)$ e tem coeficiente angular $m_{MQ} = -\frac{1}{k}$, então sua equação é dada por:

$$\frac{y - \frac{k^2}{2}}{x - \frac{k}{2}} = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{2y - k^2}{2x - k} = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow 2ky - k^3 = -2x + k \Leftrightarrow 2ky = -2x + k^3 + k \Leftrightarrow y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2 + 1}{2}$$

O ponto Q está sobre a reta de equação $y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2 + 1}{2}$ e tem abscissa nula, então $y_Q = \frac{k^2 + 1}{2}$.

Quando o ponto P tende para a origem, $k \to 0$ e $y_Q \to \frac{1}{2}$.

Portanto, o Q tende para a posição $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

10) Sabendo que $b = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \ldots\right)$, então o valor de $\log_2 |b|$ é

(A) 1
(B) 0
(C) -1
(D) -2
(E) 3

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\ldots$ é a soma de uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $\frac{\pi}{3}$, então

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\ldots=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{3}.$$

Logo, $b=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\ldots\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

Portanto, $\log_2|b|=\log_2\left|-\frac{1}{2}\right|=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$.

11) Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja a fração cuja soma dos termos é 7 dada por $\frac{x}{7-x}$, então temos:

$$\frac{x+3}{(7-x)-3}=\frac{7-x}{x}\Leftrightarrow\frac{x+3}{4-x}=\frac{7-x}{x}\Leftrightarrow x^2+3x=28-11x+x^2\Leftrightarrow x=2$$

Assim, o denominador da nova fração é $4-x=4-2=2$.

12) Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é
(A) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
(E) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Em um prisma hexagonal regular, a base é um hexágono regular e as faces laterais são 6 retângulos.
Seja a a aresta da base e b a aresta lateral, então a área da base é dada por $S_B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ e a área lateral é $S_L = 6ab$. Assim, a razão entre a área lateral e a área total é:

$$\frac{S_L}{S_T} = \frac{S_L}{S_L + 2S_B} = 75\% = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{S_L + 2S_B}{S_L} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 + \frac{2S_B}{S_L} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{S_B}{S_L} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow S_L = 6 \cdot S_B$$

$$\Rightarrow 6ab = 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a razão entre a aresta lateral e a aresta da base é $\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13) Qual é o domínio da função real de variável real, definida por $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right) + \sqrt{e^{2x-1} - 1}$?

(A) $[1, 2[$

(B) $\left[\frac{1}{2}, 2\right[\cup]3, +\infty[$

(C) $]2, +\infty[$

(D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$

(E) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
No termo $\ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$ o logaritmando deve ser positivo, então $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 2$.
No termo $\sqrt{e^{2x-1} - 1}$ o radicando deve ser não negativo, então $e^{2x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
O domínio da função f é a interseção desses dois intervalos, ou seja, $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1 \vee x > 2\right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$.

14) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$ é

(A) 30

(B) 90
(C) 120
(D) 270
(E) 560

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

O termo de ordem $p+1$ no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^7$ é dado por $T_{p+1}=C_7^p\left(x^3\right)^p\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{7-p}=C_7^p\cdot 2^{7-p}\cdot x^{4p-7}$.

Assim, o termo em x^5 no desenvolvimento ocorre quando $4p-7=5 \Leftrightarrow p=3$, ou seja, é o quarto termo e é dado por $T_4=C_7^3\cdot 2^{7-3}\cdot x^5=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\cdot 2^4\cdot x^5=560x^5$.

Portanto, o coeficiente de x^5 no desenvolvimento é 560.

15) Sejam $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$ e B^t a transposta de B. O produto da matriz A pela matriz B^t é

(A) $\begin{pmatrix}9 & 2 & 10\\ -8 & 6 & 0\\ 21 & -21 & -6\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}5 & 0 & -6\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 6\\ -6 & 0\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}-1 & 11\\ 20 & 10\end{pmatrix}$

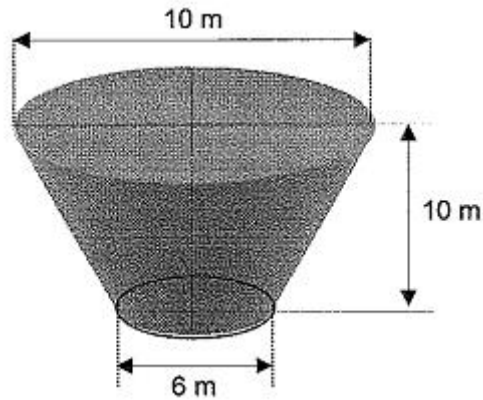
(E) $\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$B=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix} \Leftrightarrow B^t=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

16) A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?

(A) $\frac{40}{3}10^2\pi$

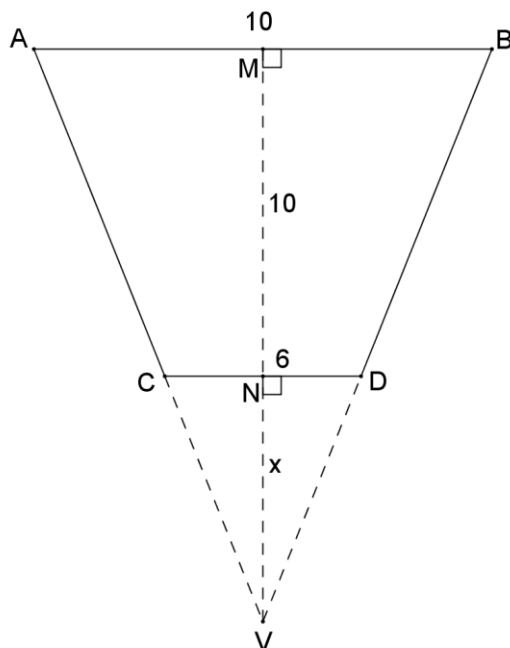
(B) $\frac{19}{2}10^5\pi$

(C) $\frac{49}{3}10\pi$

(D) $\frac{49}{3}10^4\pi$

(E) $\frac{19}{3}10^3\pi$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A figura abaixo representa a seção meridiana do cone associado ao tronco de cone que forma o reservatório.

$\Delta VCD \sim \Delta VAB \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{x+10}{10} \Leftrightarrow 10x = 6x + 60 \Leftrightarrow x = 15$.

Para encontrar o volume do tronco de cone, devemos calcular o volume do cone maior (de seção meridiana VAB) e subtrair dele o volume do cone menor (de seção meridiana VCD).

$V_{res} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 25 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = \frac{490\pi}{3} \text{ m}^3 = \frac{490\pi}{3} \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = \frac{49\pi}{3} \cdot 10^4 \ \ell$.

Alternativamente, poderíamos usar diretamente a fórmula do tronco de cone de bases paralelas:
$V_T = \frac{\pi}{3} h\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{\pi}{3} \cdot 10 \cdot \left(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2\right) = \frac{490\pi}{3} \text{ m}^3 = \frac{49\pi}{3} \cdot 10^4 \ \ell$.

17) Qual o menor valor de n, n inteiro maior que zero, para que $(1+i)^n$ seja um número real?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Vamos escrever o número complexo $1+i$ na forma trigonométrica. Assim, temos:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

Pela 1ª fórmula de De Moivre, temos:

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} \operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}$$

Para que esse número complexo seja real, o seu argumento deve ser múltiplo de π e o menor valor de n ocorre quando o argumento é exatamente igual a π, ou seja, $\frac{n\pi}{4}=\pi \Leftrightarrow n=4$.

18) Os números complexos z e w são representados no plano xy pelos pontos A e B, respectivamente. Se $z=2w+5wi$, $w\neq 0$, e sabendo-se que a soma dos quadrados das coordenadas do ponto B é 25, então o produto escalar de $\overrightarrow{OA}$ por $\overrightarrow{OB}$, onde O é a origem, é

(A) $\frac{25}{2}$

(B) $\frac{25}{3}$

(C) $\frac{25}{4}$

(D) 50

(E) $\frac{50}{3}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Sejam os números complexos na forma trigonométrica $z=|z|\operatorname{cis}\alpha$ e $w=|w|\operatorname{cis}\beta$, então o ângulo entre eles é $\theta=A\hat{O}B=|\alpha-\beta|$ e $\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$.
Efetuando o quociente entre os números complexos z e w, temos:

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\operatorname{cis}(\alpha-\beta)=\left|\frac{z}{w}\right|\left(\cos(\alpha-\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$$

$$z=2w+5wi=w(2+5i)\Leftrightarrow \frac{z}{w}=2+5i$$

O módulo do número complexo $\frac{z}{w}=2+5i$ é $\left|\frac{z}{w}\right|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Observe que, para um número complexo na forma algébrica, a sua parte real é igual ao produto do módulo pelo cosseno de seu argumento (isso aparece quando igualamos a parte real da forma algébrica e da forma trigonométrica). Assim, temos:

$$\sqrt{29}\cdot\cos(\alpha-\beta)=2\Leftrightarrow \cos\theta=\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Se a soma dos quadrados das coordenadas do ponto B é 25, então $|w|^2=25\Leftrightarrow |w|=5$.
Voltando à expressão $z=2w+5wi$, temos:

$$z=2w+5wi\Leftrightarrow z=w\cdot(2+5i)\Rightarrow |z|=|w||2+5i|=5\sqrt{29}.$$

Vamos agora calcular o produto escalar pedido:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=|z||w|\cos\theta=5\sqrt{29}\cdot 5\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}=50$$

19) Uma loja está fazendo uma promoção na venda de bolas: “Compre x bolas e ganhe x% de desconto”. A promoção é válida para compras de até 60 bolas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Julia comprou 41 bolas e poderia ter comprado mais bolas e gasto a mesma quantia. Quantas bolas a mais Julia poderia ter comprado?
(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 18
(E) 24

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja $p > 0$ o preço unitário da bola sem desconto. Se Julia comprar n bolas, então ela terá um desconto de n% e o valor pago será $V(n) = \begin{cases} p \cdot n(1 - n\%), \text{ se } 1 \le n \le 60 \\ p \cdot n \cdot (1 - 60\%), \text{ se } n > 60 \end{cases}$.

Para $1 \le n \le 60$, a expressão do valor pago é $V(n) = p \cdot n(1 - n\%) = p \cdot n\left(1 - \frac{n}{100}\right) = -\frac{p}{100} \cdot n^2 + p \cdot n$ que é uma função quadrática. O gráfico dessa função é uma parábola cujo eixo de simetria é a reta vertical passando pelo vértice: $x = x_V = \frac{-p}{2 \cdot \left(-\frac{p}{100}\right)} = 50$.

Dessa forma, a ordenada do ponto de abscissa $41 = 50 - 9$ é a mesma do ponto de abscissa $59 = 50 + 9$, ou seja, $V(41) = V(59)$.
Portanto, se Julia tivesse comprado 59 bolas teria gasto a mesma quantia que comprando 41 bolas, ou seja, ela poderia ter comprado $59 - 41 = 18$ bolas a mais com a mesma quantia.

20) De um curso preparatório de Matemática para o concurso público de ingresso à Marinha participaram menos de 150 pessoas. Destas, o número de mulheres estava para o de homens na razão de 2 para 5 respectivamente. Considerando que a quantidade de participantes foi a maior possível, de quantas unidades o número de homens excedia o de mulheres?
(A) 50
(B) 55
(C) 57
(D) 60
(E) 63

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Seja M o número de mulheres e H o número de homens, então $\frac{M}{H} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{M}{2} = \frac{H}{5} = k \Leftrightarrow \begin{cases} M = 2k \\ H = 5k \end{cases}$.

Como o número de participantes é menor do que 150, então
$M + H = 7k < 150 \Leftrightarrow k < \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$.

Se a quantidade de participantes é a maior possível, então $k = 21$, $H = 5k = 105$ e $M = 2k = 42$. Portanto, o número de homens excede o número de mulheres em $H - M = 105 - 42 = 63$ unidades.

21) Considere $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{w}$ vetores no $\mathbb{R}^3$ e θ o ângulo entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$. Qual é o valor da expressão $\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$?

(A) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

(B) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{2 + \sqrt{3}}{6}$

(E) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{w} = 2 \cdot \left(-\vec{i} + \vec{j}\right) + \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}|} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$$

22) A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x|\frac{x^2 - 1}{x}$ nos pontos P e Q. Qual é a distância entre P e Q?

(A) $2\sqrt{15}$

(B) $2\sqrt{13}$

(C) $2\sqrt{7}$

(D) $\sqrt{7}$

(E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Substituindo $2y-3x=0 \Leftrightarrow y=\frac{3x}{2}$ na equação $y=f(x)=|x|\frac{x^2-1}{x}$, temos: $\frac{3x}{2}=|x|\frac{x^2-1}{x}$.

Se $x>0$, resulta:

$\frac{3x}{2}=x\cdot\frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow 3x=2x^2-2 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\,(\text{não convém}) \vee \ x=2$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot 2=3$

Se $x<0$, resulta:

$\frac{3x}{2}=(-x)\cdot\frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow 3x=-2x^2+2 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\,(\text{não convém}) \vee \ x=-2$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3$

Assim, os pontos de interseção do gráfico das funções são $P=(-2,-3)$ e $Q=(2,3)$, e a distância entre eles é $PQ=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

23) O limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}\,2x-\cos 2x-1}{\cos x-\text{sen}\,x}$ é igual a

(A) $\sqrt{2}$
(B) $-\sqrt{2}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(E) 0

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}\,2x-\cos 2x-1}{\cos x-\text{sen}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\,\text{sen}\,x\cos x-(2\cos^2 x-1)-1}{\cos x-\text{sen}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\cos x(\cos x-\text{sen}\,x)}{\cos x-\text{sen}\,x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-2\cos x)=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

Alternativamente, poderíamos observar que o limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ é da forma $\frac{0}{0}$. Aplicando o teorema de L´Hôpital, temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x}{-\operatorname{sen} x - \cos x} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x} =$$

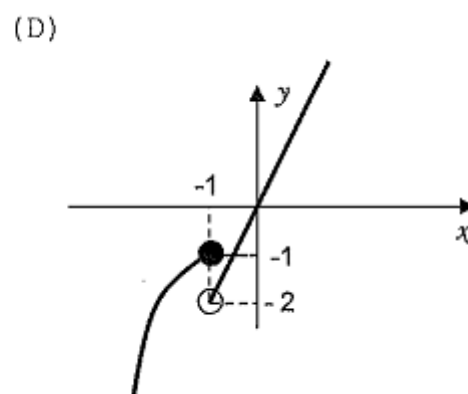
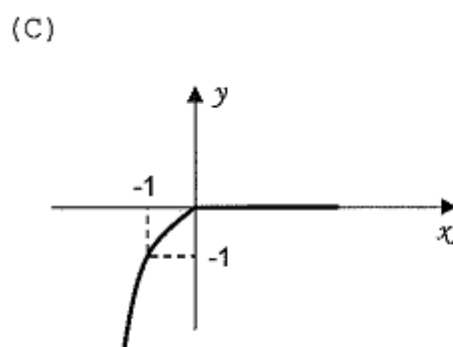
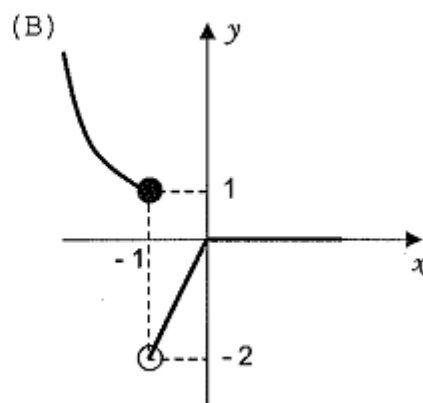
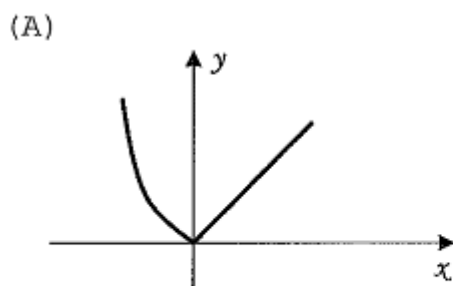
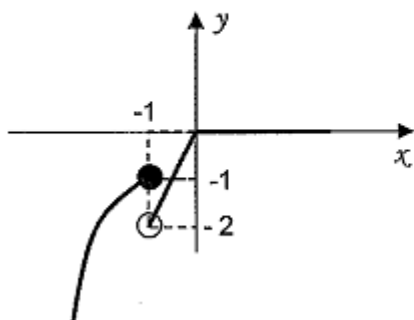
$$= -2 \cdot \frac{1+0}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

24) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x & \text{se } x > -1 \\ x|x| & \text{se } x \le -1 \end{cases}$ é

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se $x \le -1$, então $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2$.
Se $-1 < x < 0$, então $f(x) = \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x = \frac{-(x+1)(-x)}{x+1} + x = x + x = 2x$.
Se $x \ge 0$, então $f(x) = \frac{-|x+1||x|}{x+1} + x = \frac{-(x+1)x}{x+1} + x = -x + x = 0$.
Logo, $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ se } x \le -1 \\ 2x \text{ , se } -1 < x < 0 \\ 0 \text{ , se } x \ge 0 \end{cases}$.
Assim, o gráfico de f é uma parábola com concavidade para baixo em $]-\infty, -1]$ e $f(-1) = -1$; uma reta crescente em $]-1, 0[$ e uma reta coincidente com o eixo Ox em $[0, +\infty[$. Logo, o gráfico que melhor representa a função f é o da alternativa E).

25) Considere f uma função real de variável real tal que:
(1) $f(x+y) = f(x)f(y)$
(2) $f(1) = 3$
(3) $f(\sqrt{2}) = 2$
Então $f(2+3\sqrt{2})$ é igual a
(A) 108
(B) 72
(C) 54
(D) 36
(E) 12

RESPOSTA: B

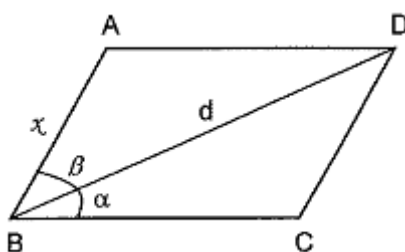
RESOLUÇÃO:
$f(2+3\sqrt{2}) = f(2) \cdot f(3\sqrt{2})$

$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9$
$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27$
$f(2\sqrt{2}) = f(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 2 \cdot 2 = 4$
$f(3\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 4 \cdot 2 = 8$
$f(2 + 3\sqrt{2}) = f(2) \cdot f(3\sqrt{2}) = 9 \cdot 8 = 72$

26) Em um certo país, o imposto de renda anual é taxado da maneira a seguir:
1°) se a renda bruta anual é menor que R$ 10.000,00 não é taxado;
2°) se a renda bruta anual é maior ou igual a R$ 10.000,00 e menor que R$ 20.000,00 é taxado em 10%;
3°) se a renda bruta anual é maior ou igual a R$ 20.000,00 é taxado em 20%.
A pessoa que ganhou no ano R$ 17.370,00 após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é
(A) R$ 17.370,40
(B) R$ 15.410,40
(C) R$ 3.840,50
(D) R$ 2.142,50
(E) R$ 1.206,60

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O rendimento líquido de R$ 17.370,00 pode ser resultante de uma renda bruta entre 10.000,00 e 20.000,00 com taxação de 10% ou de uma renda bruta superior a 20.000,00 com taxação de 20%.
Se a renda bruta é um valor x tal que $10000 \le x < 20000$, então incide um imposto de 10% e a renda líquida é $0,9 \cdot x = 17370 \Leftrightarrow x = 19.300,00$.
Se a renda bruta é um valor y tal que $y > 20000$, então incide um imposto de 20% e a renda líquida é $0,8 \cdot y = 17370 \Leftrightarrow y = 21.712,50$.
Assim, a diferença entre os rendimentos brutos é $21712,50 - 19300,00 = 2.412,50$.

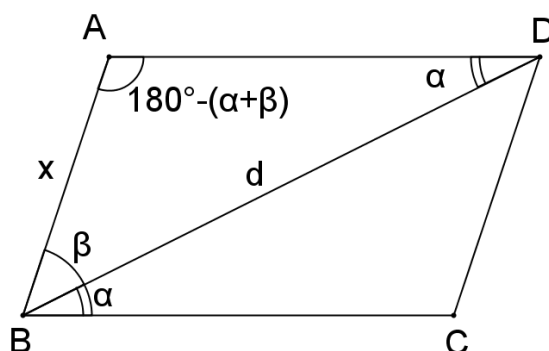
27) A figura abaixo mostra um paralelogramo ABCD. Se d representa o comprimento da diagonal BD e α e β são ângulos conhecidos (ver figura), podemos afirmar que o comprimento x do lado AB é igual a

(A) $d \cos \beta$
(B) $\dfrac{d \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

(C) $d\,\text{sen}\,\beta$

(D) $\dfrac{d\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

(E) $d\cos(180°-(\alpha+\beta))$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O quadrilátero ABCD é um paralelogramo, então $AD \parallel BC$ o que implica $A\hat{D}B = C\hat{B}D = \alpha$ (alternos internos).

Aplicando a lei dos senos no ΔABD, temos: $\dfrac{x}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{d}{\text{sen}(180^\circ-(\alpha+\beta))} \Leftrightarrow x = \dfrac{d\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$.

28) Um aspirante da Escola Naval tem, em uma prateleira de sua estante, 2 livros de Cálculo, 3 livros de História e 4 livros de Eletricidade. De quantas maneiras ele pode dispor estes livros na prateleira de forma que os livros de cada disciplina estejam sempre juntos?
(A) 1728
(B) 1280
(C) 960
(D) 864
(E) 288

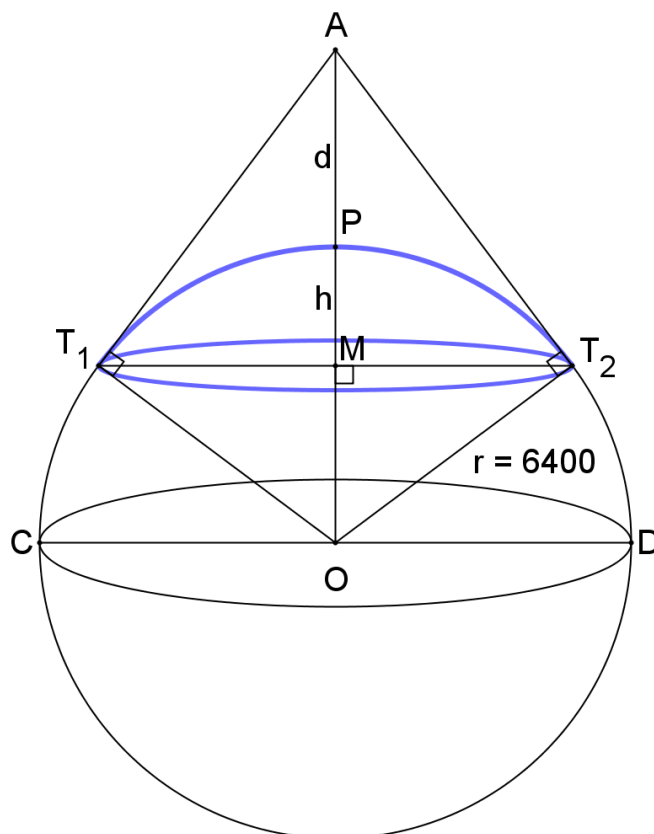
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Ele pode permutar as matérias entre si e os livros de cada matéria. Assim, o número de maneiras de dispor os livros na prateleira é $3!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4! = 6\cdot 2\cdot 6\cdot 24 = 1728$.

29) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\dfrac{1}{10}$ da superfície da Terra. A que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a 6400 km

(A) 1200 km
(B) 1280 km
(C) 1600 km
(D) 3200 km
(E) 4200 km

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e o ponto A representa o astronauta. Observe que a superfície da Terra foi considerada uma superfície esférica.

A área S_C que o astronauta consegue observar é a área de uma calota esférica em uma esfera de raio $r = 6400$ e altura h = PM.

A superfície da esfera é $S_e = 4\pi r^2$, então a área que o astronauta observa é $S_c = \frac{1}{10} \cdot S_e = \frac{4\pi r^2}{10}$.

A área da calota esférica de raio r e altura h é $S_c = 2\pi rh$.

Igualando as duas expressões para a área da calota, temos: $2\pi rh = \frac{4\pi r^2}{10} \Leftrightarrow h = \frac{r}{5}$.

$$OM = OP - PM = r - \frac{r}{5} = \frac{4r}{5}$$

No triângulo retângulo AOT_2, temos:

$$OT_2^2 = AO \cdot OM \Leftrightarrow r^2 = AO \cdot \frac{4r}{5} \Leftrightarrow AO = \frac{5r}{4} = \frac{5}{4} \cdot 6400 = 8000$$

A distância do astronauta à superfície da Terra é $d = AP = AO - OP = 8000 - 6400 = 1600 \text{ km}$.

30) Sabendo-se que $i\sqrt{3}$ é uma das raízes da equação $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0$, a soma de todas as raízes desta equação é

(A) $-2i\sqrt{3}$

(B) $4i\sqrt{3}$

(C) 0

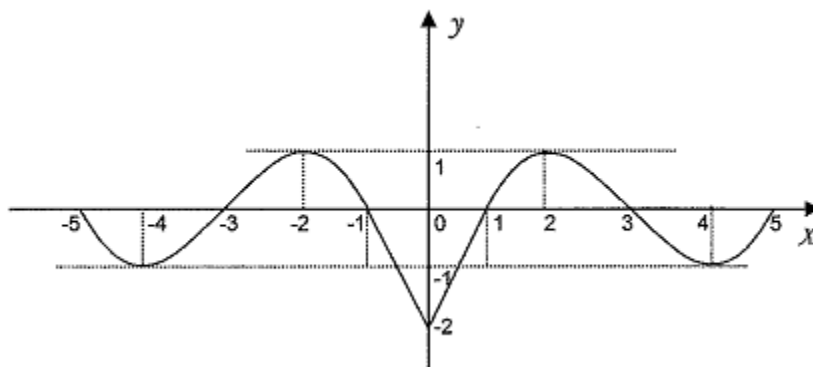
(D) -1

(E) -2

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Pelas relações de Girard, a soma de todas as raízes da equação é $\sigma_1 = \frac{-1}{1} = -1$.

31) Considere a função real $y = f(x)$, definida para $-5 \le x \le 5$, representada graficamente abaixo. Supondo $a \ge 0$ uma constante real, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 9)$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em exatamente 4 pontos distintos?

(A) $1 < a < \frac{10}{9}$

(B) $\frac{2}{9} < a < 1$

(C) $0 < a < \frac{2}{9}$

(D) $\frac{10}{9} < a < 3$

(E) $a > 3$

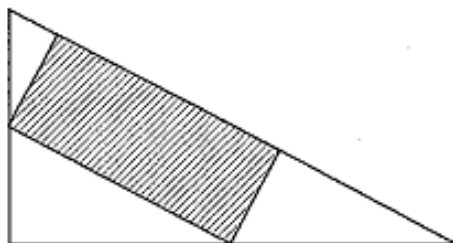
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

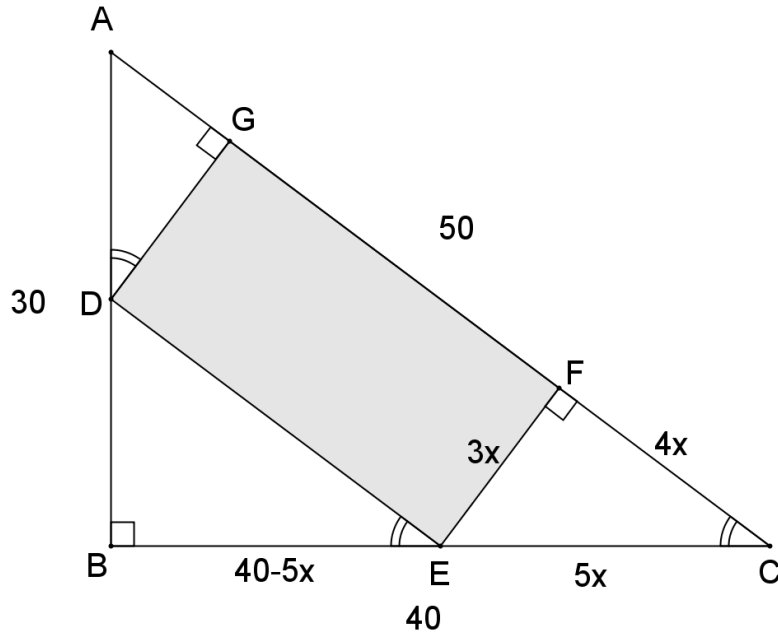
Se $a > 0$, então o gráfico de $p(x) = a(x^2 - 9)$ é uma parábola com concavidade para cima, raízes em -3 e 3, vértice $(0, -9a)$.

Se $-9a < -2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{9}$, então o vértice da parábola está abaixo do ponto de mínimo da função $f(x)$, $(0, -2)$, e o gráfico de $p(x)$ interceptará o gráfico de $f(x)$ apenas em 2 pontos (os pontos de abscissas $x = \pm 3$).

Por outro lado se $-2 < -9a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{2}{9}$, então o vértice da parábola está entre a origem e o ponto de mínimo da função $f(x)$, $(0, -2)$, e o gráfico de $p(x)$ interceptará o gráfico de $f(x)$ em 4 pontos distintos, dois deles com abscissas no intervalo $]-1, 1[$ e os pontos de abscissas $x = \pm 3$.

32) Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 30 cm, 40 cm e 50 cm. Deseja-se a partir dele, recortar um espelho retangular, com a maior área possível, conforme figura abaixo. Então as dimensões do espelho são

(A) 25 cm e 12 cm
(B) 20 cm e 15 cm
(C) 10 cm e 30 cm
(D) 12,5 cm e 24 cm
(E) $10\sqrt{3}$ cm e $10\sqrt{3}$ cm

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\Delta CEF \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{CE}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{30} = \frac{CF}{40} = \frac{CE}{50} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} EF = 3x \\ CF = 4x \\ CE = 5x \end{cases}$$

$$\Delta EDB \sim \Delta CEF \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{BE}{CF} \Leftrightarrow \frac{DE}{5x} = \frac{40-5x}{4x} \Leftrightarrow DE = \frac{5}{4}(40-5x)$$

Dessa forma, a área do retângulo DEFG, em função de x, é $S(x) = 3x \cdot \frac{5}{4}(40-5x) = -\frac{75}{4}x^2 + 150x$ que é uma função quadrática com coeficiente do 2º grau negativo e, portanto, tem ponto de máximo.

Logo, o valor máximo da área ocorre na abscissa do vértice, ou seja, $x_V = \frac{-150}{2 \cdot \left(-\frac{75}{4}\right)} = 4$.

Portanto, as dimensões do retângulo de área máxima são $3x = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$ e $\frac{5}{4} \cdot (40-5x) = \frac{5}{4} \cdot (40 - 5 \cdot 4) = 25 \text{ cm}$.

33) Para que valores de m vale a igualdade $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{m-2}$, $x \in \mathbb{R}$?

(A) $m < 2$

(B) $m \le \frac{3}{2}$

(C) $m \le \frac{3}{2}$ ou $m \ge 2$

(D) $m \le \frac{5}{2}$ e $m \ne 2$

(E) $m \le \frac{7}{2}$ e $m \ne 2$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Vamos identificar os valores de m para os quais a equação $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{m-2}$ possui solução.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então devemos ter $-1 \leq \frac{m-1}{m-2} \leq 1$.

Vamos resolver as duas inequações separadamente e depois fazer a interseção dos intervalos obtidos.

$$\frac{m-1}{m-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m-2} \leq 0 \Leftrightarrow m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$$\frac{m-1}{m-2} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m-2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2} \ \vee \ m > 2$$

Assim, os valores de m para os quais a equação possui solução são tais que $m \leq \frac{3}{2}$.

34) Uma caixa contém 4 pistolas e 4 fuzis, sendo uma pistola e 2 fuzis defeituosos. Duas armas são retiradas da caixa sem reposição. A probabilidade de pelo menos uma arma ser defeituosa ou ser pistola é igual a

(A) $\frac{27}{28}$

(B) $\frac{13}{14}$

(C) $\frac{6}{7}$

(D) $\frac{11}{14}$

(E) $\frac{5}{7}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Seja A o evento no qual pelo menos uma das armas é defeituosa. Assim, $\overline{A}$ é o evento no qual as duas armas não têm defeito.

Seja B o evento no qual pelo menos uma das armas é pistola. Assim, $\overline{B}$ é o evento no qual as duas armas são fuzis.

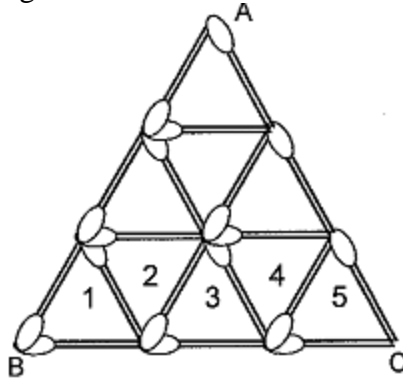
A probabilidade pedida é a probabilidade do evento $A \cup B$.

Vamos calcular a probabilidade do evento complementar: $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

O evento $\overline{A} \cap \overline{B}$ é o evento no qual as duas armas não têm defeito e as duas armas são fuzis, ou seja, as duas armas retiradas são fuzis sem defeito, então $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2 \cdot 1}{8 \cdot 7} = \frac{1}{28}$.

Assim, temos: $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{28}$ e a probabilidade pedida é dada por:

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{28} = \frac{27}{28}$.

35) Um grande triângulo equilátero será construído com palitos de fósforo, a partir de pequenos triângulos equiláteros congruentes e dispostos em linhas. Por exemplo, a figura abaixo descreve um triângulo equilátero (ABC) construído com três linhas de pequenos triângulos equiláteros congruentes (a linha da base do triângulo ABC possui 5 pequenos triângulos equiláteros congruentes). Conforme o processo descrito, para que seja construído um triângulo grande com linha de base contendo 201 pequenos triângulos equiláteros congruentes são necessários um total de palitos igual a

(A) 15453
(B) 14553
(C) 13453
(D) 12553
(E) 11453

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Se uma linha tem n palitos de fósforo na base, então ela conterá $n + (n-1) = 2n-1$ triângulos equiláteros.
Observe que para construir os triângulos "virados para cima" em cada linha de n palitos na base são necessários 3n palitos (contando com os n palitos na base).
Os triângulos "virados para baixo" são formados pelos palitos na base da linha seguinte.
A quantidade de palitos na base de linhas consecutivas sempre diminui uma unidade, pois ela é igual à quantidade de intervalos entre os triângulos da linha de baixo.
No caso pedido, a linha de base do triângulo grande contém 201 triângulos pequenos, então $2n-1 = 201 \Leftrightarrow n = 101$, ou seja, a base do triângulo grande é formada por 101 palitos.
Assim, a quantidade de palitos necessária para construir um triângulo com linha de base com 201 triângulos pequenos, que equivale a 101 palitos na base, é dada por:
$\sum_{k=1}^{101} 3k = \frac{(3+303) \cdot 101}{2} = 15453$.
Observe que se trata da soma de uma progressão aritmética de primeiro termo 3, razão 3 e com 101 termos.

36) Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo de aresta L?

(A) $\text{arcsen}\,\frac{1}{4}$

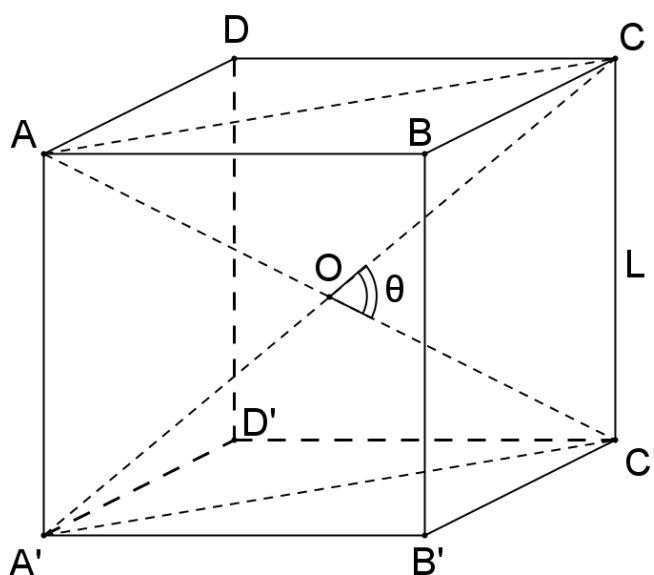
(B) $\arccos\frac{1}{4}$

(C) $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$

(D) $\arccos\frac{1}{3}$

(E) $\text{arctg}\,\frac{1}{4}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

As diagonais AC’ e A’C do cubo ABCD−A’B’C’D’ também são diagonais do retângulo ACC’A’.
O segmento AC é diagonal do quadrado ABCD de lado L, então $AC = L\sqrt{2}$.
O segmento AC’ é hipotenusa do triângulo retângulo ACC’, então $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{\left(L\sqrt{2}\right)^2 + L^2} = L\sqrt{3}$.

Assim, temos: $OC = OC' = \frac{AC'}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OCC’, temos:

$$L^2 = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos\theta \Leftrightarrow L^2 = \frac{3L^2}{2} - \frac{3L^2}{2}\cos\theta \Leftrightarrow \frac{3L^2}{2}\cos\theta = \frac{L^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \theta = \arccos\frac{1}{3}$$

Observe que θ é o menor ângulo entre as diagonais, pois $CC' = L$ é menor que $AC = L\sqrt{2}$.

37) A soma das soluções da equação trigonométrica $\cos 2x + 3\cos x = -2$, no intervalo $[0, 2\pi]$ é

(A) π
(B) 2π
(C) 3π
(D) $\frac{5\pi}{3}$
(E) $\frac{10\pi}{3}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$\cos 2x + 3\cos x = -2 \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \ \vee \ \cos x = -\frac{1}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

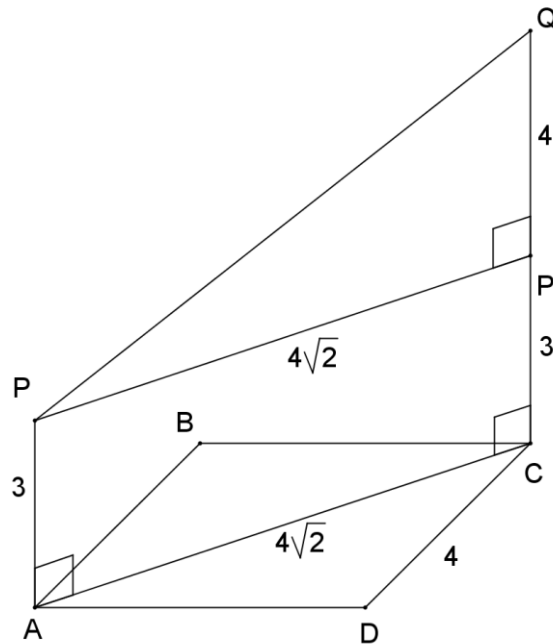
$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3}$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ e a soma das soluções é $\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 3\pi$.

38) Um quadrado ABCD, de lado 4 cm, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos AP e CQ, perpendiculares a α, medindo respectivamente, 3 cm e 7 cm. A distância PQ tem medida, em cm, igual a

(A) $2\sqrt{2}$
(B) $2\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $3\sqrt{3}$
(E) $4\sqrt{3}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

O quadrilátero APQC formado é um trapézio retângulo. Traçando PP' perpendicular a CQ, obtemos um retângulo ACP'P e um triângulo retângulo PP'Q.

O segmento AC é diagonal do quadrado ABCD de lado 4, então $AC = 4\sqrt{2}$.

No retângulo ACP'P, temos: $CP' = AP = 3$ e $PP' = AC = 4\sqrt{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta PP'Q$, temos: $PQ^2 = (4\sqrt{2})^2 + 4^2 = 48 \Leftrightarrow PQ = 4\sqrt{3}$ cm.

39) Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

( ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

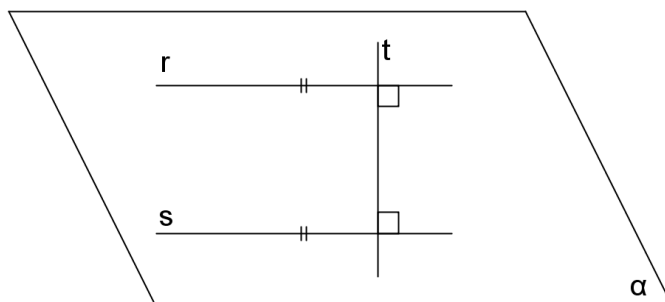
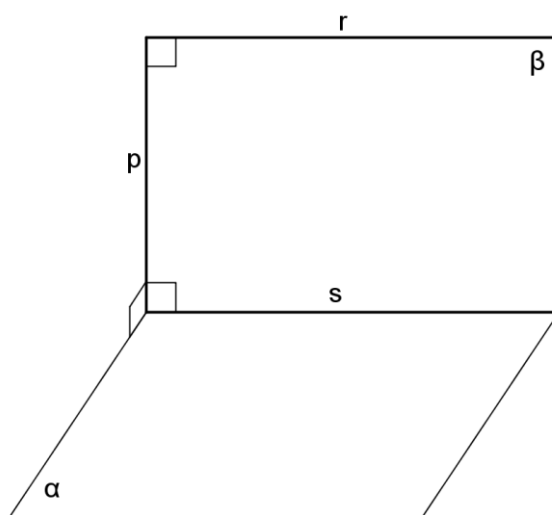
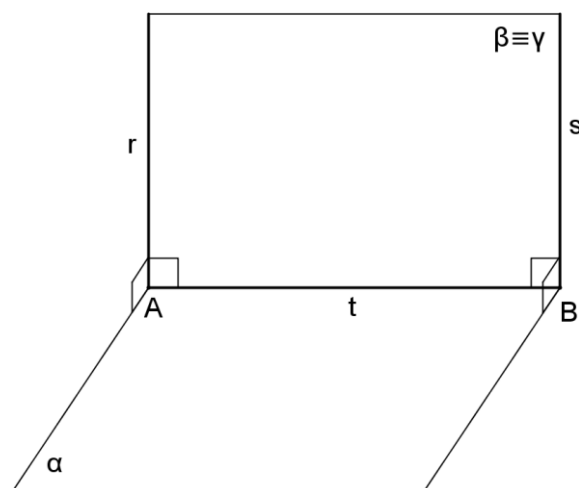
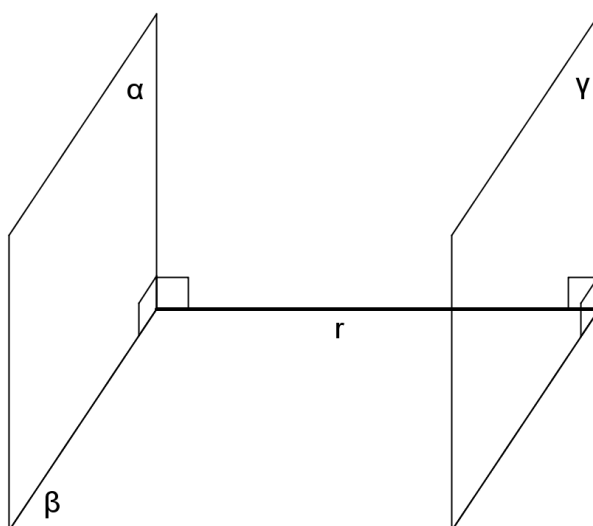
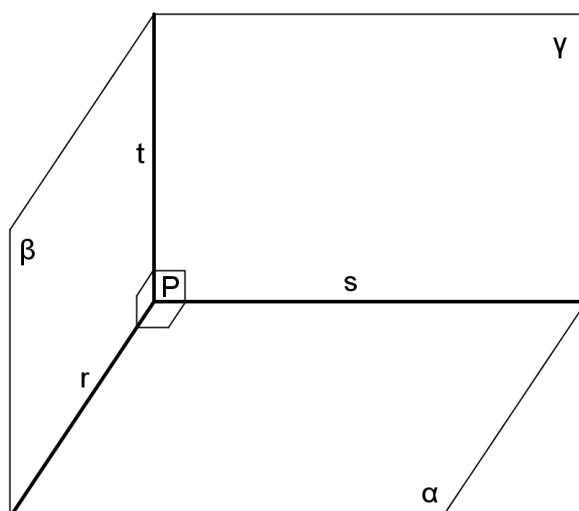
( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

(A) (F) (F) (V) (F) (V)
(B) (V) (F) (V) (V) (F)
(C) (V) (V) (F) (V) (V)
(D) (F) (V) (V) (V) (V)
(E) (V) (V) (V) (V) (V)

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

(F) Contraexemplo: Considere duas retas r e s paralelas distintas contidas em um plano α. Uma terceira reta t perpendicular a essas duas está contida nesse plano e, portanto, não é perpendicular a ele.

(V) Seja a reta p perpendicular ao plano α e a reta r perpendicular a p. Seja o plano β determinado pelas retas concorrentes p e r. Seja a reta s a interseção dos planos α e β. Como $s \in \alpha$, então $p \perp s$. Logo, as retas r e s são ambas perpendiculares à reta p e estão contidas no plano β, então r e s são paralelas.

(V) Sejam as retas r e s perpendiculares a um plano α. Sejam A e B os pontos de interseção das retas r e s com o plano α, respectivamente, e t a reta que passa por A e B, então $r \perp t$ e $s \perp t$. Seja o plano β determinado pelas retas r e t, então $\beta \perp \alpha$, pois β contém a reta $r \perp \alpha$. Seja γ o plano determinado pelas retas s e t, então $\gamma \perp \alpha$, pois γ contém a reta $s \perp \alpha$. Como existe um único plano perpendicular a α que contenha a reta $t \in \alpha$, então os planos β e γ são coincidentes. Sendo assim, as retas r e s são coplanares e ambas perpendiculares à reta t, o que implica que r e s são paralelas.

(V) Sejam os planos α e β perpendiculares entre si. Seja o plano γ paralelo ao plano α. Sabe-se que se dois planos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro. Seja uma reta r contida no plano β tal que $r \perp \alpha$, então $r \perp \gamma$. Sabe-se que dois planos são perpendiculares se um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Portanto, o plano β, que contém a reta $r \perp \gamma$, é perpendicular ao plano γ.

(V) Sejam os planos α e β perpendiculares. Seja a reta r a interseção dos planos α e β. Sabe-se que, se dois planos são perpendiculares e uma reta de um deles é perpendicular à reta interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro plano. Sejam um ponto $P \in r$ e as retas t e s passando por P tais que $t \perp r$ e $t \in \beta$, e $s \perp r$ e $s \in \alpha$. Isso implica $t \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. Seja γ o plano determinado pelas retas s e t, então $\gamma \perp \beta$ e $\gamma \perp \alpha$ (Lembre-se que dois planos são perpendiculares se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.). Portanto, os planos α, β, e γ são perpendiculares dois a dois e cortam-se em um único ponto P.

Outra maneira é a seguinte: Considere que α, β e γ são três planos perpendiculares dois a dois. Sejam $r = \alpha \cap \beta$ e $s = \alpha \cap \gamma$. As retas r e s são coplanares (estão no plano α) e não são paralelas (caso elas fossem paralelas, bastaria traçar uma reta p perpendicular a r e s, e p seria perpendicular a β e γ, o que implicaria que esses dois planos seriam paralelos). Portanto, r e s são secantes e o ponto de interseção de r e s pertence aos três planos.

40) Seja $\overline{AB}$ o lado de um decágono regular inscrito em um círculo de raio R e centro O. Considere o ponto C sobre a reta que passa por A e B tal que $\overline{AC} = R$. O lado $\overline{OC}$ do triângulo de vértices O, A e C mede,

(A) $R\sqrt{2-\sqrt{5}}$

(B) $\frac{R}{2}\sqrt{5-\sqrt{2}}$

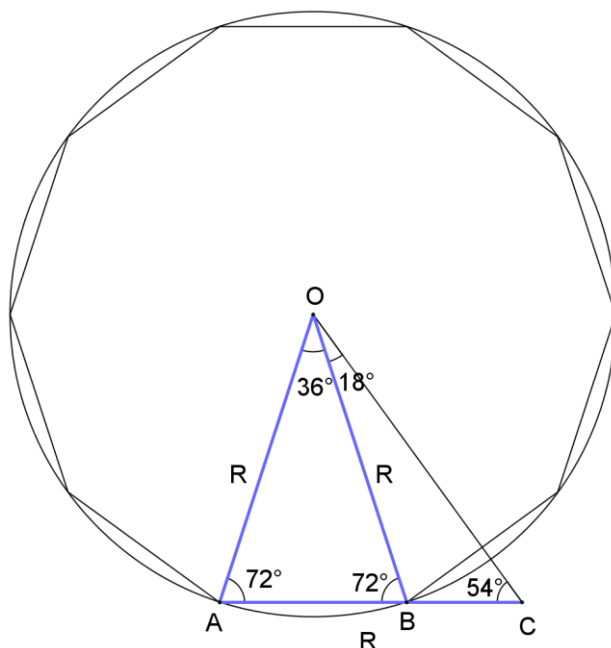
(C) $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

(D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$

(E) $\frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Aplicando a lei dos senos no ΔOBC, temos:

$$\frac{R}{\operatorname{sen}54^\circ}=\frac{OC}{\operatorname{sen}108^\circ}\Leftrightarrow OC=R\cdot\frac{\operatorname{sen}108^\circ}{\operatorname{sen}54^\circ}=R\cdot\frac{2\operatorname{sen}54^\circ\cos54^\circ}{\operatorname{sen}54^\circ}=2R\cos54^\circ$$

Vamos calcular o cosseno de 54º.

$$\operatorname{sen}54^\circ=\operatorname{sen}3\cdot18^\circ=\cos36^\circ=\cos2\cdot18^\circ\Leftrightarrow3\operatorname{sen}18^\circ-4\operatorname{sen}^3 18^\circ=1-2\operatorname{sen}^2 18^\circ$$

$$\Leftrightarrow4\operatorname{sen}^3 18-2\operatorname{sen}^2 18^\circ-3\operatorname{sen}18^\circ+1=0\Leftrightarrow\left(\operatorname{sen}18^\circ-1\right)\left(4\operatorname{sen}^2 18^\circ+2\operatorname{sen}18^\circ-1\right)=0$$

Como $0<\operatorname{sen}18^\circ<1$, então $\operatorname{sen}18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\cos108^\circ=\cos2\cdot54^\circ=-\operatorname{sen}18^\circ\Leftrightarrow2\cos^2 54^\circ-1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow\cos54^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Logo, $OC=2R\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2012/2013

1) Considere a função real de variável real definida por $f(x)=3x^4-4x^3+5$. É verdade afirmar que

(A) f tem um ponto de mínimo em $]-\infty,0[$.

(B) f tem um ponto de inflexão em $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

(C) f tem um ponto de máximo em $[0,+\infty[$.

(D) f é crescente em $[0,1]$.

(E) f é decrescente em $[-1,2]$.

RESPOSTA: B

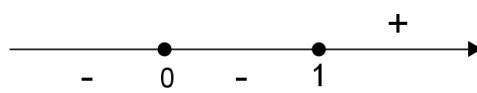
RESOLUÇÃO:

$f(x)=3x^4-4x^3+5 \Rightarrow f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1) \Rightarrow f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$

A primeira derivada tem uma raiz dupla $x=0$ e uma raiz simples $x=1$.

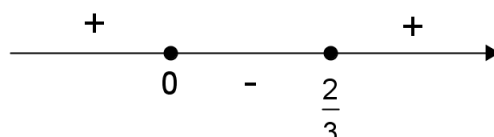
Vamos estudar o sinal da primeira derivada.

+

- $\underline{0}$ - 1

Logo, a função f é decrescente em $]-\infty,1[$ e crescente em $]1,+\infty[$.

Analisando o sinal da segunda derivada nas raízes da primeira derivada: $f''(0)=0$ e $f''(1)=12>0$.

Portanto, $x=1$ é um ponto de mínimo.

Vamos estudar o sinal da segunda derivada.

Portanto, a função f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, e concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{2}{3}\right[$. Além disso, $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$ são pontos de inflexão (pontos em que há mudança de concavidade).

Portanto, é correto afirmar que f tem ponto de inflexão em $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

2) Os números reais a, b, c, d, f, g, h constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Se $e^{\det A} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$, onde A é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$ e $h = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, então o valor de $(b-2g)$ vale

(A) $-\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{21}{16}$

(C) $-\frac{49}{48}$

(D) $\frac{15}{16}$

(E) $\frac{31}{48}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$h = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{64}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{48}$$

Note que para o cálculo de h usamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita $S = \frac{a_1}{1-q}$, onde $a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ e $q = \frac{1}{4}$.

$$e^{\det A} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{2}}\right]^{\frac{2}{9}} = e^{\frac{2}{9}} \Leftrightarrow \det A = \frac{2}{9}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix} = (d-b)(d-a)(b-a) = \frac{2}{9}$$

Seja r a razão da $PA: a, b, c, d, f, g, h$, então

$$(d-b)(d-a)(b-a) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 2r\cdot 3r\cdot r = \frac{2}{9} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$h = a + 6r = \frac{1}{48} \Leftrightarrow a + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow a = \frac{1}{48} - 2 = -\frac{95}{48}$$

$$b - 2g = (a+r) - 2(a+5r) = -a - 9r = -\left(-\frac{95}{48}\right) - 9\cdot\frac{1}{3} = \frac{95}{48} - 3 = -\frac{49}{48}.$$

3) Considere a função $f(x)=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+2\operatorname{sen} x$, com $0<x<\frac{\pi}{2}$. O resultado de $\int\left[(f'(x))^2+2-2\cos 2x\right]dx$ é

(A) $\operatorname{tg} x+8x+2\operatorname{sen} 2x+C$
(B) $\sec x+6x+C$
(C) $\sec x-2x-\operatorname{sen} 2x+C$
(D) $\operatorname{tg} x+8x+C$
(E) $\sec x+6x-\operatorname{sen} 2x+C$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$f(x)=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+2\operatorname{sen} x$

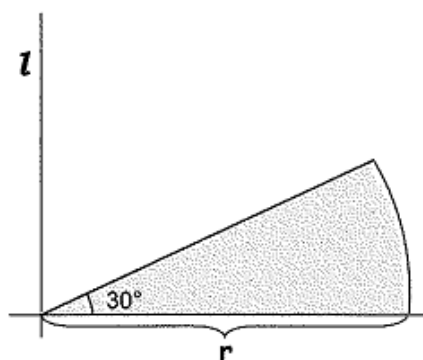
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sec x+\operatorname{tg} x}\cdot(\sec x+\operatorname{tg} x)'+2\cos x=\frac{\sec x\operatorname{tg} x+\sec^2 x}{\sec x+\operatorname{tg} x}+2\cos x=$$

$$=\frac{\sec x(\operatorname{tg} x+\sec x)}{\sec x+\operatorname{tg} x}+2\cos x=\sec x+2\cos x$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2=(\sec x+2\cos x)^2=\sec^2 x+2\sec x\cdot 2\cos x+4\cos^2 x=\sec^2 x+4+4\cos^2 x$$

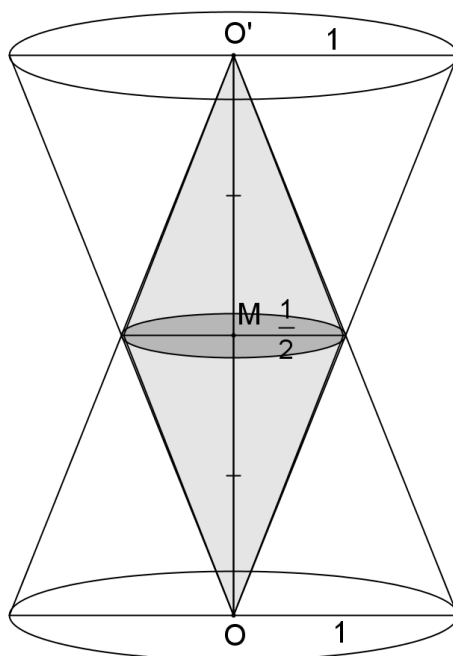
$$(f'(x))^2+2-2\cos 2x=\sec^2 x+4+4\cos^2 x+2-2(2\cos^2 x-1)=\sec^2 x+8$$

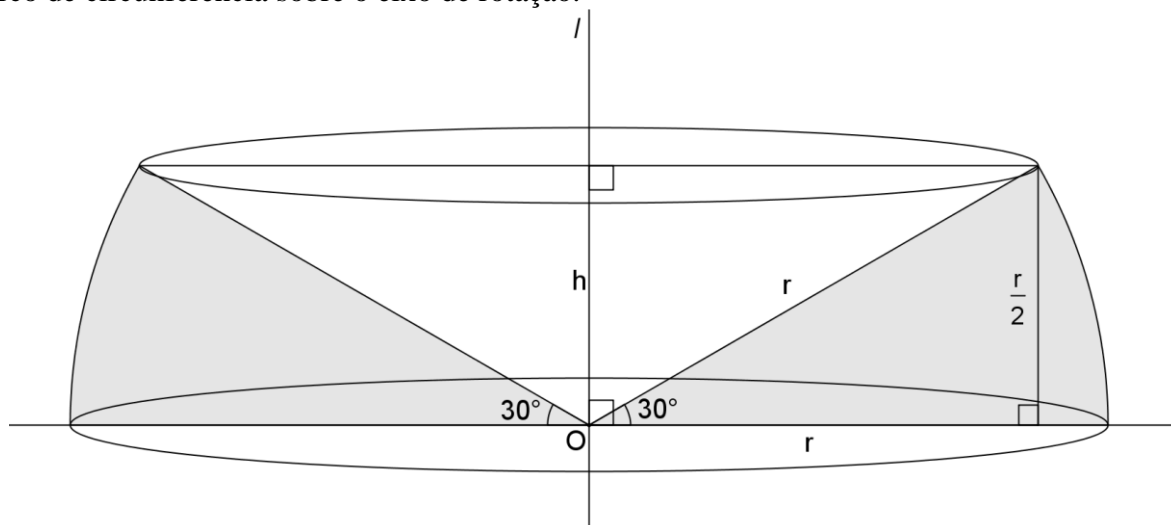
$$\int\left[(f'(x))^2+2-2\cos 2x\right]dx=\int\left[\sec^2 x+8\right]dx=\operatorname{tg} x+8x+C$$

4) Considere dois cones circulares retos de altura H e raio da base $1\,\text{cm}$, de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo *l*. O valor de H é, em cm,

(A) $\left(2+\sqrt{3}\right)r^3$
(B) $2\sqrt{3}\,r^3$
(C) $\frac{4}{3}r^3$

(D) $2r^3$
(E) $4r^3$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

O volume comum aos dois cones é representado na figura pelo sólido sombreado, composto por dois cones de altura $\frac{H}{2}$ e raio da base $\frac{1}{2}$. Assim, esse volume é dado por $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi H}{12}$.

O volume do setor esférico é dado por $V_{SE} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, onde r é o raio do setor circular e h é a projeção do arco de circunferência sobre o eixo de rotação.

$h = \frac{r}{2} \Rightarrow V_{SE} = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi}{3} r^3$

Como os volumes devem ser iguais, então $\frac{\pi H}{12}=\frac{\pi}{3}r^3 \Leftrightarrow H=4r^3$.

5) Seja A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x)=\ln(2+x+3|x|-|x+1|)$ e a imagem da função $g(x)=-2+\frac{\sqrt{2(x+|x-2|)}}{2}$.
Pode-se afirmar que
(A) $A=B$
(B) $A\cap B=\varnothing$
(C) $A\supset B$
(D) $A\cap B=\mathbb{R}_+$
(E) $A-B=\mathbb{R}_-$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Se $f(x)=\ln(2+x+3|x|-|x+1|)$, então o domínio de f é tal que

$$2+x+3|x|-|x+1|>0 \Rightarrow \begin{cases} x<-1:\ 2+x+3(-x)-(-x-1)>0 \Leftrightarrow x<3 \Rightarrow x<-1 \\ -1\le x<0:\ 2+x+3(-x)-(x+1)>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3} \Rightarrow -1\le x<0 \\ x\ge 0:\ 2+x+3x-(x+1)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3} \Rightarrow x\ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A=\mathbb{R}$

Vamos analisar a imagem da função $g(x)=-2+\frac{\sqrt{2(x+|x-2|)}}{2}$.

$$\begin{cases} x<2 \Rightarrow g(x)=-2+\frac{\sqrt{2(x-x+2)}}{2}=-1 \\ x\ge 2 \Rightarrow g(x)=-2+\frac{\sqrt{2(x+x-2)}}{2}=-2+\sqrt{x-1} \end{cases}$$

$x\ge 2 \Rightarrow \sqrt{x-1}\ge 1 \Rightarrow g(x)\ge -1 \Rightarrow B=[-1,+\infty[$

Portanto, $A\supset B$.

6) Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$ cm, então seu volume vale
(A) $45\cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
(B) $0,45\cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
(C) $60\cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
(D) $0,15\cdot 10^{3}\pi\ dm^3$

(E) $60\cdot10^3\pi\text{ dm}^3$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$R=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}\cdot5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}=3^{\frac{1/2}{1-1/4}}\cdot5^{\frac{1/4}{1-1/4}}=3^{\frac{2}{3}}\cdot5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{45}$$

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\sqrt[3]{45}\right)^3=60\pi\text{ cm}^3=60\pi\cdot10^{-3}\text{dm}^3=60\cdot10^{-3}\pi\text{ dm}^3$$

Outra forma de encontrar o valor de R é a seguinte:

$$R=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}\Leftrightarrow R=\sqrt{3\sqrt{5R}}\Leftrightarrow R^2=3\sqrt{5R}\Leftrightarrow R^4=9\cdot5R\Leftrightarrow R^3=45\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{45}$$

7) Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale

(A) $\frac{\left(1+2\sqrt{3}\right)a}{3}$

(B) $\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)a}{3}$

(C) $\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{3}$

(D) $\left(1+2\sqrt{3}\right)a$

(E) $\left(3+2\sqrt{3}\right)a$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Sejam O_1, O_2 e O_3 os centros das três moedas, então o $\Delta O_1O_2O_3$ é equilátero.

O baricentro do $\Delta O_1O_2O_3$ é o centro da circunferência maior (base do cilindro) e o seu raio R é igual a GA. Assim, temos: $R = GO_3 + O_3A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} + a = \frac{\left(2\sqrt{3}+3\right)a}{3}$.

Note que usamos que a altura do $\Delta O_1O_2O_3$ é $O_3H = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que o baricentro G divide a altura na razão $\frac{2}{3}$.

8) A soma dos quadrados das raízes da equação $|\text{sen}\, x| = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$, quando $0 < x < 2\pi$ vale

(A) $\frac{49}{36}\pi^2$

(B) $\frac{49}{9}\pi^2$

(C) $\frac{7}{3}\pi^2$

(D) $\frac{14}{9}\pi^2$

(E) $\frac{49}{6}\pi^2$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$|\text{sen } x| = 1 - 2\text{sen}^2 x \Leftrightarrow |\text{sen } x| = 1 - 2|\text{sen } x|^2 \Leftrightarrow 2|\text{sen } x|^2 + |\text{sen } x| - 1 = 0$

$\Leftrightarrow |\text{sen } x| = -1$ (não convém) $\vee$ $|\text{sen } x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen } x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

A soma dos quadrados das raízes é $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{11\pi}{6}\right)^2 = \frac{49\pi^2}{9}$.

9) Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

( ) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então eles são paralelos $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

( ) Se $\vec{u} = (3,0,4)$ e $\vec{v} = (2,\sqrt{8},2)$, então $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^3$.

Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (F) (V) (V)
(B) (F) (V) (F) (F) (V)
(C) (V) (F) (V) (V)(F)
(D) (F) (F) (F) (V) (F)
(E) (V) (V) (V) (F) (F)

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
(F)
Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(180^\circ - \theta) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\theta$

$\Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Contra exemplo: $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (0,1,0) \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2+2 = 4 \neq 2 = 1+1 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

(F)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = 0$

Contra exemplo: $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$, $\vec{w} = (0,2,0)$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$.

(F)

Contra exemplo: $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (2,0,0)$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \neq 0$.

Note que, se $\vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ e $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(V)

$\vec{u}=(3,0,4)\Rightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$

$\vec{v}=(2,\sqrt{8},2)\Rightarrow\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(\sqrt{8})^2+2^2}=4$

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{(3,0,4)\cdot(2,\sqrt{8},2)}{5\cdot4}=\frac{6+0+8}{20}=\frac{7}{10}$

$\text{tg}^2\,\theta=\sec^2\theta-1=\left(\frac{10}{7}\right)^2-1=\frac{51}{49}\overset{0<\theta<\pi}{\Rightarrow}\text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{51}}{7}$

(F)

Essa expressão assemelha-se à desigualdade triangular. Entretanto, a igualdade ocorre quando os vetores são paralelos e de mesmo sentido.

$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos(180^\circ-\theta)=$

$=\|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\|v\|\cos\theta\le\|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\|v\|=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2$

$\Rightarrow\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\cos\theta=1\Leftrightarrow\theta=0\Leftrightarrow\vec{u}\,||\,\vec{v}$ e de mesmo sentido.

Contra exemplo: $\vec{u}=(1,0,0)$, $\vec{v}=(2,0,0)$ e $\vec{u}+\vec{v}=(3,0,0)$, então $\|\vec{u}+\vec{v}\|=3=1+2=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

10) Um ponto $P(x,y)$ move-se ao longo da curva plana de equação $x^2+4y^2=1$, com $y>0$. Se a abscissa x está variando a uma velocidade $\frac{dx}{dt}=\text{sen}\,4t$, pode-se afirmar que a aceleração da ordenada y tem por expressão

(A) $\frac{(1+x^2)\text{sen}^2\,4t+4x^3\cos4t}{8y^3}$

(B) $\frac{x^2\,\text{sen}\,4t+4x\cos^2 4t}{16y^3}$

(C) $\frac{-\text{sen}^2\,4t-16xy^2\cos4t}{16y^3}$

(D) $\frac{x^2\,\text{sen}\,4t-4x\cos^2 4t}{8y^3}$

(E) $\frac{-\text{sen}^2\,4t+16xy^2\cos4t}{16y^3}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$x^2+4y^2=1\Rightarrow2x\cdot\frac{dx}{dt}+8y\cdot\frac{dy}{dt}=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{4y}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{4y}\cdot\text{sen}\,4t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(x\,\text{sen}\,4t)'\,4y - (x\,\text{sen}\,4t)\cdot 4\frac{dy}{dt}}{(4y)^2} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{dx}{dt}\cdot \text{sen}\,4t + x\cdot 4\cos 4t\right)\cdot 4y - 4x\,\text{sen}\,4t\left(-\frac{x}{4y}\text{sen}\,4t\right)}{16y^2} =$$

$$= -\frac{4y\,\text{sen}^2\,4t + 16xy\cos 4t + \frac{x^2}{y}\text{sen}^2\,4t}{16y^2} = -\frac{\text{sen}^2\,4t\left(\frac{x^2+4y^2}{y}\right) + 16xy\cos 4t}{16y^2} =$$

$$= \frac{-\text{sen}^2\,4t - 16xy^2\cos 4t}{16y^3}$$

11) Considere π o plano que contém o centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,

(A) $\frac{50}{3}$

(B) $\frac{50}{9}$

(C) $\frac{100}{3}$

(D) $\frac{200}{9}$

(E) $\frac{100}{9}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)+(z^2-4z+4) = -13+9+1+4$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 1$$

Logo, o centro da esfera é o ponto $O(3,-1,2) \in \pi$.

A reta de equação paramétrica $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3+2t \end{cases}$ contém o ponto $P(1,2,3)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (1,-1,2)$.

Como o plano π contém a reta de equação $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, então o ponto $P(2,1,3) \in \pi$ e o vetor $\vec{v} = (1,-1,2) \in \pi$.

Como $\overrightarrow{OP} = (-1,2,1) \in \pi$ e $\vec{v} = (1,-1,2) \in \pi$, então

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{OP} \times \vec{v} = (-1,2,1) \times (1,-1,2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,3,-1)$$

Assim, a equação do plano π é $5x + 3y - z + d = 0$ e como $O(3,-1,2) \in \pi$, temos $5 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$ e a equação resultante é $\pi : 5x + 3y - z - 10 = 0$.

Os segmentos determinados pelo plano sobre os eixos ordenados são 2, $\frac{10}{3}$, 10 e o volume do tetraedro trirretângulo é $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9}$ unidades de volume.

OBSERVAÇAO: Essa mesma questão apareceu na prova da Escola Naval em 2008.

12) Considere f e f' funções reais de variável real, deriváveis, onde $f(1) = f'(1) = 1$. Qual o valor da derivada da função $h(x) = \sqrt{f(1 + \text{sen}\, 2x)}$ para $x = 0$?

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 0

(D) $-\frac{1}{3}$

(E) 1

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$h(x) = \sqrt{f(1 + \text{sen}\, 2x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(1 + \text{sen}\, 2x)}} \cdot f'(1 + \text{sen}\, 2x) \cdot (2\cos 2x) = \frac{\cos 2x \cdot f'(1 + \text{sen}\, 2x)}{\sqrt{f(1 + \text{sen}\, 2x)}}$$

$$h(0) = \frac{\cos 0 \cdot f'(1 + \text{sen}\, 0)}{\sqrt{f(1 + \text{sen}\, 0)}} = \frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

13) Considere a sequência $(a, b, 2)$ uma progressão aritmética e a sequência $(b, a, 2)$ uma progressão geométrica não constante, $a, b \in \mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a, b) e pelo vértice da curva $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ é

(A) $6y - x - 4 = 0$

(B) $2x-4y-1=0$
(C) $2x-4y+1=0$
(D) $x+2y=0$
(E) $x-2y=0$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$PA(a,b,2) \Leftrightarrow 2b = a+2$
$PG(b,a,2) \Leftrightarrow a^2 = 2b$
$\Rightarrow a^2 = a+2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 2$
$(a,b) \in \left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right);(2,2)\right\}$
O par ordenado $(a,b)=(2,2)$ não convém, pois a PG é não constante.
Analisando a curva $y^2-2y+x+3=0$, temos:
$y^2-2y+x+3=0 \Leftrightarrow y^2-2y+1=-x-2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = -(x+2)$
Logo, trata-se de uma parábola de eixo de simetria horizontal, voltada para a esquerda e com vértice $V(-2,1)$.
Portanto, devemos encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ e $(-2,1)$.

$$\frac{y-1}{x-(-2)} = \frac{\frac{1}{2}-1}{(-1)-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y-2 = -x-2 \Leftrightarrow x+2y=0$$

14) O valor de $\int_0^{\pi/2}\left(e^{2x}-\cos x\right)dx$ é

(A) $\frac{e^{\pi}}{2}-\frac{3}{2}$
(B) $\frac{e^{\pi/2}}{2}-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{3}{2}$
(D) $\frac{e^{\pi/2}}{2}-\frac{3}{2}$
(E) $\frac{e^{\pi/2}}{2}+\frac{1}{2}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\int_0^{\pi/2}\left(e^{2x}-\cos x\right)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-\operatorname{sen}x\right]_0^{\pi/2}=\left(\frac{e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{e^{2\cdot 0}}{2}-\operatorname{sen}0\right)=\frac{e^{\pi}}{2}-\frac{3}{2}$$

15) Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cossec}^2\pi x+\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}+2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R}-\{-1\}$?

(A) $\sqrt{3}$
(B) -1
(C) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$
(D) 2
(E) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Sejam $\operatorname{arctg}x=\alpha$ e $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\beta$, então $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{x}{x+1}$ e $\alpha,\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x+\frac{x}{x+1}}{1-x\cdot\frac{x}{x+1}}=1\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{x+1-x^2}=1\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=-1\ \vee\ x=\frac{1}{2}$$

Como $x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$, então $x=\frac{1}{2}$. Logo,

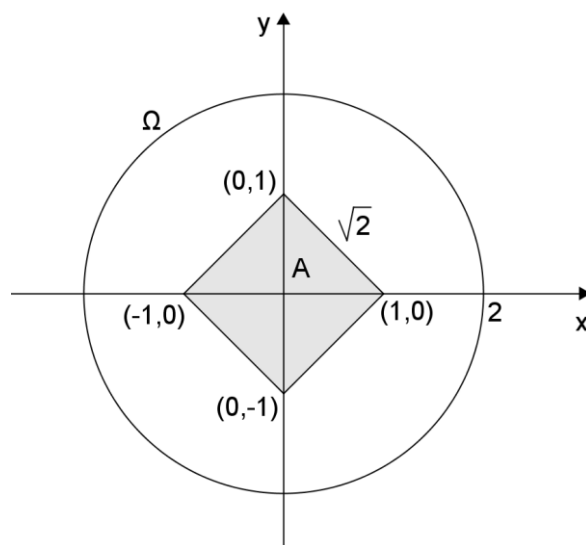
$$\sqrt{\operatorname{cossec}^2\pi x+\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}+2}=\sqrt{\operatorname{cossec}^2\frac{\pi}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}+2}=\sqrt{1^2+1+2}=2.$$

16) Considere como espaço amostral (Ω), o círculo no plano xy de centro na origem e raio igual a 2. Qual a probabilidade do evento $A=\{(x,y)\in\Omega\ /\ |x|+|y|<1\}$?

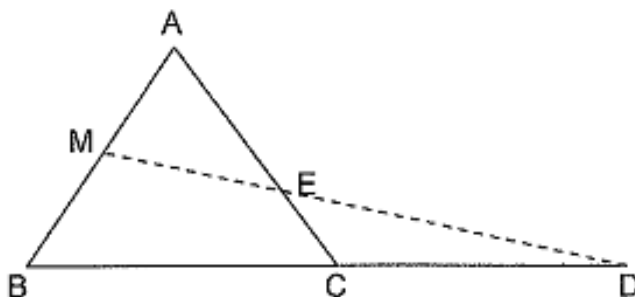
(A) $\frac{2}{\pi}$
(B) 4π
(C) $\frac{1}{\pi}$

(D) $\frac{1}{2\pi}$
(E) π

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$A = \{(x, y) \in \Omega \,/\, |x| + |y| < 1\}$
A inequação $|x| + |y| < 1$ representa um quadrado de vértices em $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, e lado $\sqrt{2}$, conforme mostra a figura abaixo.

Utilizando o conceito de probabilidade geométrica, onde a probabilidade de um evento é a razão entre a área da região que o representa e a área da região que representa o espaço amostral, temos

$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{2\pi}$.

17) O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do triângulo MAE vale

(A) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$

(B) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$

(C) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$

(E) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Aplicando o teorema de Menelaus ao ΔABC com a secante MED, temos:
$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BD}{CD}=1\Leftrightarrow\frac{5}{5}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{16}{6}=1\Leftrightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{8}{8+3}=\frac{8}{11}$

Assim, temos: $\frac{S_{MAE}}{S_{ABC}}=\frac{AM\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{11}=\frac{4}{11}\Rightarrow S_{MAE}=\frac{4}{11}\cdot S_{ABC}=\frac{4}{11}\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{11}$ u.a.

18) Seja p a soma dos módulos das raízes da equação $x^3+8=0$ e q o módulo do número complexo Z, tal que $Z\cdot\overline{Z}=108$, onde $\overline{Z}$ é o conjugado de Z. Uma representação trigonométrica do número complexo $p+qi$ é

(A) $12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

(B) $20\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

(C) $12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

(D) $20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

(E) $10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
A equação $x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8$ possui três raízes de módulo $\sqrt[3]{8}=2$, portanto $p=3\cdot 2=6$.
Essas raízes poderiam ser explicitadas utilizando-se a 2ª fórmula de De Moivre, como segue:
$x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8=8\,\text{cis}\,\pi\Rightarrow x=2\,\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2$

$Z\cdot\overline{Z}=108\Rightarrow|Z\cdot\overline{Z}|=|108|\Leftrightarrow|Z|\cdot|\overline{Z}|=108\Leftrightarrow|Z|\cdot|Z|=108\Leftrightarrow|Z|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}\Rightarrow q=6\sqrt{3}$

A forma trigonométrica do número complexo $p+qi=6+6\sqrt{3}\,i$ é

$$p+qi=12\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

19) Seja m a menor raiz inteira da equação $\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]!=1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt{y}-z^3\right)^{12m}$ é

(A) $\frac{12!}{6!6!}y^{18}z^{\frac{3}{2}}$

(B) $\frac{-12!}{6!6!}y^{3}z^{18}$

(C) $\frac{30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$

(D) $\frac{-30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$

(E) $\frac{-12!}{6!6!}y^{3}z^{18}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]!=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x-7)}{3}=0 \ \vee\ \frac{(x-1)(5x-7)}{3}=1$$

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3}=0 \Leftrightarrow x=1 \ \vee\ x=\frac{7}{5}$$

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3}=1 \Leftrightarrow 5x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \ \vee\ x=2$$

$$S=\left\{\frac{2}{5},1,\frac{7}{5},2\right\}$$

Como m é a menor raiz inteira, então $m=1$.

Assim, temos: $\left(\sqrt{y}-z^3\right)^{12m}=\left(\sqrt{y}-z^3\right)^{12}$ cujo termo geral do desenvolvimento é $T_{p+1}=\binom{12}{p}\left(-z^3\right)^p\cdot\left(\sqrt{y}\right)^{12-p}$.

Como o desenvolvimento possui $12+1=13$ termos, o termo médio é o sétimo, logo $p+1=7 \Leftrightarrow p=6$.

Portanto, o termo médio é dado por $T_7=\binom{12}{6}\left(-z^3\right)^6\cdot\left(\sqrt{y}\right)^{12-6}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}\cdot z^{18}\cdot y^3$, onde $y\ge 0$.

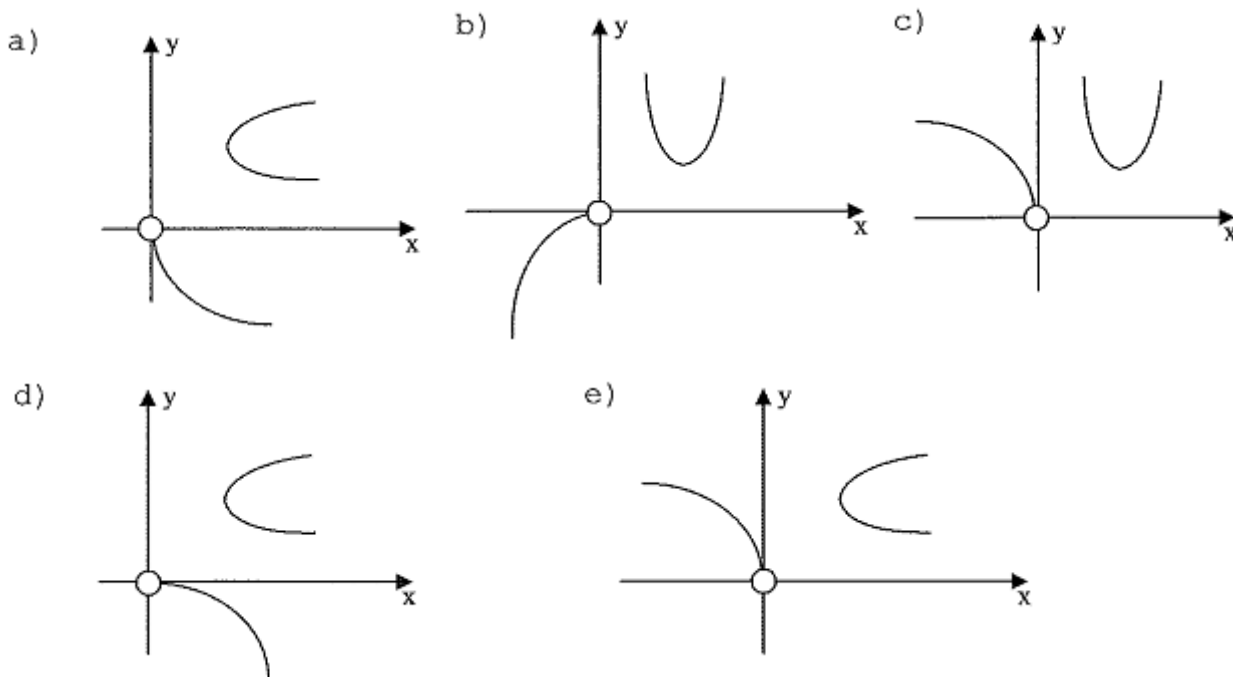
20) A figura que melhor representa o gráfico da função $x = |y| e^{\frac{1}{y}}$ é

a)

b)

c)

d)

e)

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A expressão $x = |y| \cdot e^{\frac{1}{y}}$ apresenta x como função de y.

Temos a restrição $y \neq 0$, que implica $x \neq 0$, logo o gráfico da função não cruza nenhum dos eixos coordenados.

Como $|y| > 0$ e $e^{\frac{1}{y}} > 0$, então $x > 0$, o que exclui as alternativas B, C e E.

Vamos agora analisar a expressão da função:

1° caso: $y > 0$

$$y > 0 \Rightarrow x = y \cdot e^{\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 \cdot e^{\frac{1}{y}} + y \cdot e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

$$0 < y < 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} < 0 \Rightarrow x \text{ é decrescente}$$

$$y > 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} > 0 \Rightarrow x \text{ é crescente}$$

2° caso: $y < 0$

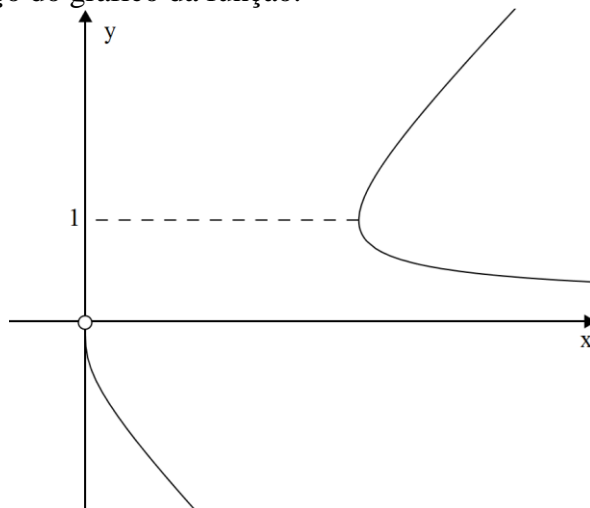
$$y < 0 \Rightarrow x = -y \cdot e^{\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -1 \cdot e^{\frac{1}{y}} - y \cdot e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) < 0$$

$\Rightarrow x$ é decrescente

Para escolher entre A e D temos que analisar a concavidade quando $y < 0$.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\left(e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) - e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^3}$$

Assim, com $y < 0$, temos $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$ e concavidade "para cima" (apontando para x positivo).

A figura abaixo é um esboço do gráfico da função.

Portanto, a alternativa correta é A.

Note que seria possível, por comodidade, encontrar o gráfico de $y = |x| e^{\frac{1}{x}}$ (relação inversa) e depois refletir esse gráfico em relação à reta $y = x$, o que resultaria no gráfico procurado.

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2011/2012

1) Sejam:

i) r uma reta que passa pelo ponto $(\sqrt{3},-1)$.
ii) A e B respectivamente os pontos em que r corta os eixos x e y.
iii) C o ponto simétrico de B em relação à origem.

Se o triângulo ABC é equilátero, a equação da circunferência de centro A e raio igual à distância entre A e C é

a) $(x-\sqrt{3})^2+y^2=12$
b) $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=16$
c) $(x-\sqrt{3})^2+y^2=16$
d) $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=12$
e) $(x-3\sqrt{3})^2+y^2=12$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Sejam $A(p,0)$ e $B(0,q)$, então a equação segmentária da reta r é $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

O ponto simétrico de B em relação à origem é $C(0,-q)$.

O triângulo ABC de vértices $A(p,0)$, $B(0,q)$ e $C(0,-q)$ tem lados dados por:

$\overline{BC}=|2q|$

$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(p-0)^2+(0-q)^2}=\sqrt{p^2+q^2}$

Como o triângulo ABC é equilátero, então

$\sqrt{p^2+q^2}=|2q| \Rightarrow p^2+q^2=4q^2 \Leftrightarrow p^2=3q^2$. (I)

O ponto $(\sqrt{3},-1)\in r$, então $\frac{\sqrt{3}}{p}+\frac{(-1)}{q}=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{p}=1+\frac{1}{q}$. (II)

$\Rightarrow \frac{3}{p^2}=1+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}$ (III)

Substituindo (I) em (III), temos: $\frac{3}{3q^2}=1+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2} \Leftrightarrow q=-2$.

Substituindo $q=-2$ em (II), vem: $\frac{\sqrt{3}}{p}=1+\frac{1}{(-2)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow p=2\sqrt{3}$.

Assim, temos $A(2\sqrt{3},0)$ e $\overline{AC}=|2\cdot(-2)|=4$ e a equação da circunferência de centro A e raio igual à distância entre A e C será dada por $(x-2\sqrt{3})^2+y^2=16$.

2) Calculando-se $\lim\limits_{x \to 0^+} (\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x}$, obtém-se

a) ∞
b) 0
c) e
d) -1
e) 1

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Seja $y = \lim\limits_{x \to 0^+} (\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x} \Rightarrow \ln y = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(\text{cotg}\, x)^{\text{sen}\, x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \text{sen}\, x \cdot \ln(\text{cotg}\, x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\text{cotg}\, x)}{\text{cossec}\, x}$

O limite acima é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar o teorema de L'Hôpital. Assim,

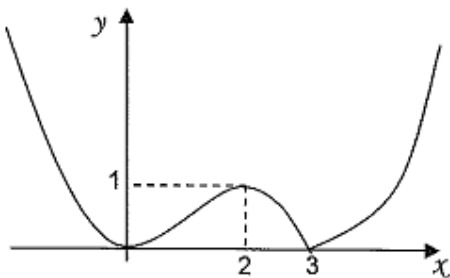
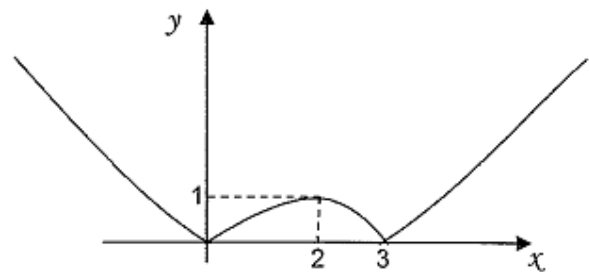
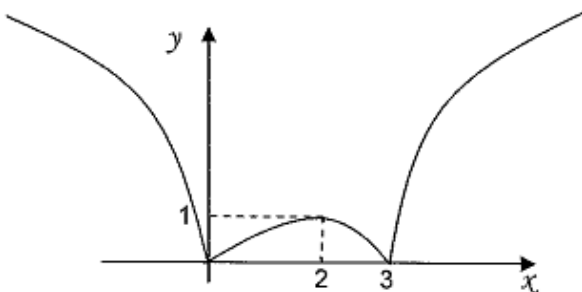
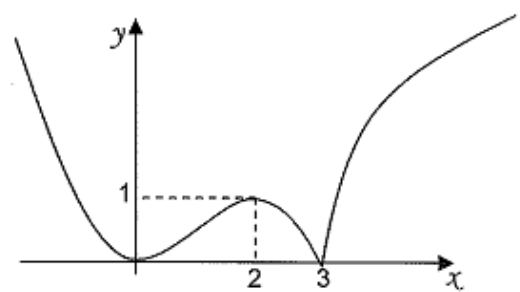
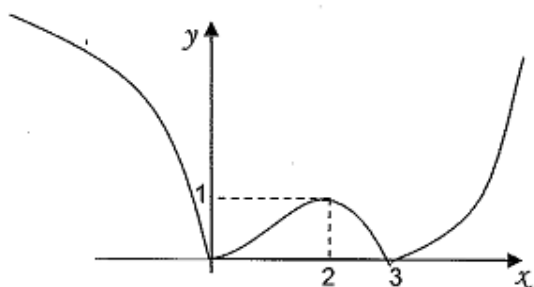
$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\text{cotg}\, x} \cdot (-\text{cossec}^2\, x)}{-\text{cossec}\, x \cdot \text{cotg}\, x} = \lim_{x \to 0^+} \text{tg}^2\, x \cdot \text{cossec}\, x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow y = e^0 = 1$$

3) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x) = \dfrac{1}{4}\left|x^3 - 3x^2\right|$ é

(A)

(B)

(C)

(D)

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos traçar o gráfico de $g(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2)$.

Raízes de $g(x)$: 0 (dupla) e 3.

$g'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x)$

Raízes de $g'(x)$: 0 e 2

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \ \vee \ x > 2$: estritamente crescente

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$: estritamente decrescente

$g''(x) = \frac{1}{4}(6x - 6)$

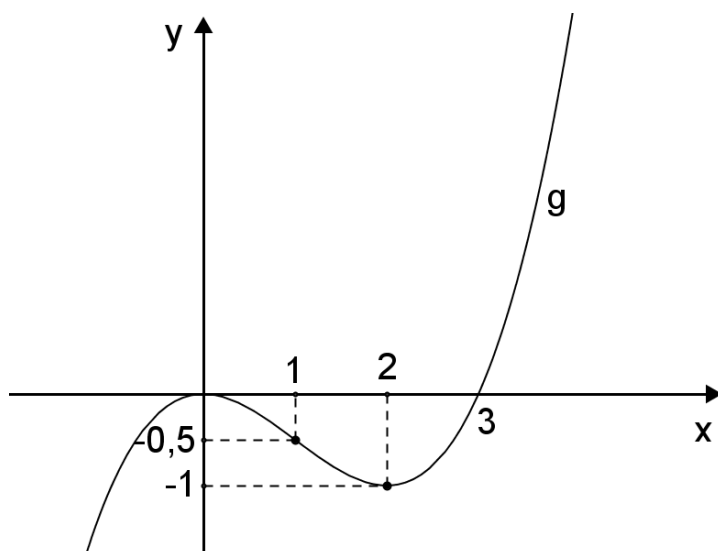
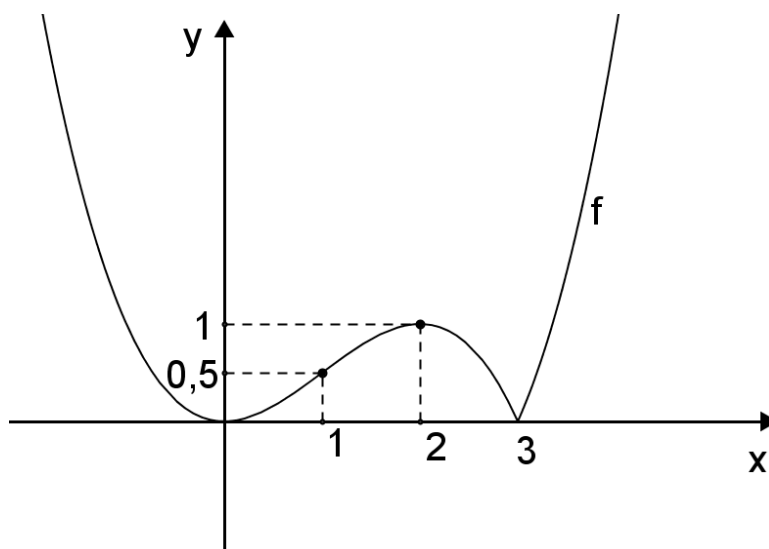
$g''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow (0,0)$ é um ponto de máximo local

$g''(2) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow (2,-1)$ é um ponto de mínimo local

$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$: concavidade voltada para cima

$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$: concavidade voltada para baixo

Assim, o ponto de abscissa 1 é um ponto de inflexão.

As informações acima permitem esboçar o gráfico de $g(x)$.

O gráfico de $f(x)=\frac{1}{4}\left|x^3-3x^2\right|$ pode ser obtido refletindo-se as partes de ordenada negativa do gráfico de $g(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-3x^2\right)$ em relação ao eixo Ox.

4) Qual o valor de $\int(\operatorname{cossec} x \cdot \sec x)^{-2}\,dx$?

a) $\frac{1}{32}(4x-\operatorname{sen} 4x)+c$

b) $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+c$

c) $\frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x}{9}+c$

d) $\frac{1}{16}(4x-\operatorname{sen} 4x)+c$

e) $\frac{1}{16}(4x+\text{sen}\,4x)+c$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\int(\text{cossec}\,x\cdot\sec x)^{-2}\,dx=\int\frac{1}{\text{cossec}^2\,x\sec^2\,x}\,dx=\int\text{sen}^2\,x\cos^2\,xdx=\frac{1}{4}\int(2\,\text{sen}\,x\cos x)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\text{sen}^2(2x)\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\text{sen}\,4x}{4}\right)+c=\frac{1}{32}(4x-\text{sen}\,4x)+c$$

5) Em que ponto da curva $y^2=2x^3$ a reta tangente é perpendicular à reta de equação $4x-3y+2=0$?

a) $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{16}\right)$

b) $\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{16}\right)$

c) $\left(1,-\sqrt{2}\right)$

d) $(2,-4)$

e) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

O coeficiente angular da reta de equação $4x-3y+2=0$ é $m=\frac{4}{3}$.

Para que a reta tangente à curva $y^2=2x^3$ seja perpendicular à reta $4x-3y+2=0$, essa tangente deve possuir coeficiente angular $-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4}$, ou seja, a derivada da curva no ponto buscado deve ser igual a $-\frac{3}{4}$.

$$y^2=2x^3\Rightarrow 2y\cdot y'=6x^2\Leftrightarrow y'=\frac{3x^2}{y}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'=\frac{3x^2}{y}=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x^2=-y\\ y^2=2x^3\Rightarrow\left(-4x^2\right)^2=2x^3\Leftrightarrow 16x^4=2x^3\Leftrightarrow x=0\ (\text{não convém})\ \vee\ x=\frac{1}{8}\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{8}\Rightarrow y=-4x^2=-4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=-\frac{1}{16}$$

Logo, o ponto procurado é $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$.

6) Considere S, a soma das raízes da equação trigonométrica $4\operatorname{sen}^3 x - 5\operatorname{sen} x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual o valor de $\operatorname{tg} S + \operatorname{cossec} 2S$?

a) 2
b) 1
c) 0
d) –1
e) –2

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$4\operatorname{sen}^3 x - 5\operatorname{sen} x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) - 5(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} x - \cos x)[4(1 + \operatorname{sen} x \cos x) - 5] = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{sen} x - \cos x)(2\operatorname{sen} 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ \vee \\ 2\operatorname{sen} 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \vee 2x = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} S + \operatorname{cossec} 2S = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{cossec}\frac{3\pi}{2} = (-1) + (-1) = -2$$

7) Considere x, y, z e a números reais positivos, tais que seus logaritmos numa dada base a, são números primos satisfazendo as igualdades $\begin{cases} \log_a(axy) = 50 \\ \log_a \sqrt{\frac{x}{z}} = 22 \end{cases}$. Podemos afirmar que $\sqrt{\log_a(xyz) + 12}$ vale:

a) 8
b) $\sqrt{56}$
c) $\sqrt{58}$
d) 11
e) 12

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \log_a(axy)=50 \Leftrightarrow \log_a a+\log_a x+\log_a y=50 \Leftrightarrow 1+\log_a x+\log_a y=50 \Leftrightarrow \log_a x+\log_a y=49 \\ \log_a \sqrt{\frac{x}{z}}=22 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_a x-\log_a z)=22 \Leftrightarrow \log_a x-\log_a z=44 \end{cases}$$

$$(\log_a x+\log_a y)-(\log_a x-\log_a z)=49-44 \Leftrightarrow \log_a y+\log_a z=5$$

Como $\log_a x$, $\log_a y$ e $\log_a z$ são números primos, então $\log_a z$ é ímpar. Assim, tem-se $\log_a y=2$ e $\log_a z=3$, o que implica $\log_a x=47$.

$$\Rightarrow \sqrt{\log_a(xyz)+12}=\sqrt{\log_a x+\log_a y+\log_a z+12}=\sqrt{47+2+3+12}=\sqrt{64}=8$$

Note que há uma pequena imprecisão no enunciado que estabelece que $\log_a a=1$ seria um número primo, o que não é verdade.

8) Sendo x e y números reais, a soma de todos os valores de x e de y, que satisfazem ao sistema $\begin{cases} x^y=\frac{1}{y^2} \\ y^x=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$, vale

a) $\frac{36}{5}$

b) $\frac{9}{2}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{25}{4}$

e) $-\frac{1}{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R} \Rightarrow x>0$$

$$x^y=\frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^y=y^{-2} \Rightarrow x=y^{-2/y}$$

$$y^x=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y^x=x^{-1/2} \Leftrightarrow y^{\left(y^{-2/y}\right)}=\left(y^{-2/y}\right)^{-1/2}=y^{1/y}$$

$$\Leftrightarrow y=1 \vee \left(y^{-2/y}=\frac{1}{y}=y^{-1} \Leftrightarrow -\frac{2}{y}=-1 \Leftrightarrow y=2\right)$$

$$y=1 \Rightarrow x=y^{-2/y}=1^{-2/1}=1$$

$y=2 \Rightarrow x=y^{-2/y}=2^{-2/2}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow S=\left\{(1,1);\left(\frac{1}{2},2\right)\right\}$

Assim, a soma de todos os valores de x e de y, que satisfazem ao sistema, é $1+1+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}$.

9) Considere um quadrado de vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. Suponha que a probabilidade de uma região A, contida no quadrado, seja a área desta região. Considere a região $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq\frac{2}{3} \text{ ou } y\geq\frac{2}{3}\right\}$. A probabilidade do evento A ocorrer é

a) $\frac{1}{3}$

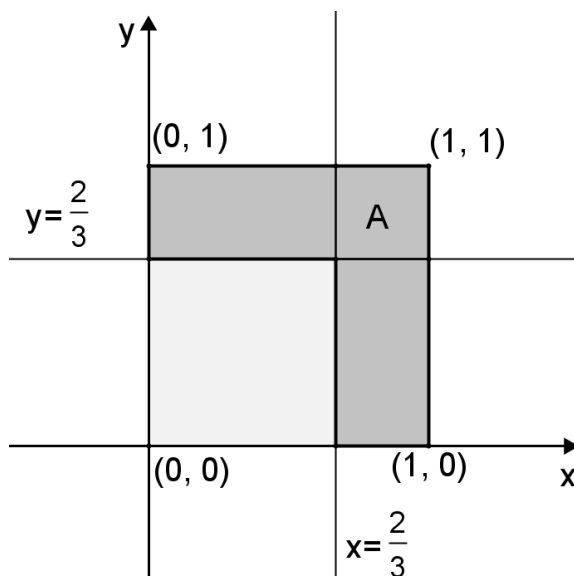
b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{5}{9}$

e) $\frac{7}{9}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

A probabilidade do evento A, $p(A)$, é a área da região A interior ao quadrado, $S(A)$, sombreada na figura.

$$\Rightarrow p(A) = S(A) = 1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Observe que o examinador define a probabilidade de uma região A contida no quadrado. A região que ele apresenta não está contida no quadrado, de forma que sua probabilidade não foi claramente definida no enunciado. Para a resolução da questão, consideramos que a probabilidade de A seria a interseção da área A com a área do quadrado, ou seja, a parte da área A contida no quadrado.

10) Sejam f e g funções cujo domínio é o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 3\}$ onde n representa o número de lados de um polígono regular. As funções f e g associam respectivamente para cada $n \in D$, as medidas dos ângulos interno e externo do mesmo polígono. É correto afirmar que:

a) $f(n) < g(n)$ se e somente se $(n-1)! = n! - (n-1)!$.

b) Se $f(n) = g(n)$ então o polígono considerado é um triângulo equilátero.

c) $\log_2\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1 - \log_2(n-2)$ para todo n ou $g(10) = 2f(10)$.

d) f é injetora e $\text{sen}\left(f(n) + g(n)\right) = 0$.

e) $(gof)(n)$ está sempre definida.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$f(n) = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$g(n) = \frac{360^\circ}{n}$$

a) INCORRETA

$$f(n) < g(n) \Leftrightarrow \frac{180^\circ(n-2)}{n} < \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n-2 < 2 \Leftrightarrow n < 4 \Rightarrow n = 3$$

$$(n-1)! = n! - (n-1)! \Leftrightarrow 2(n-1)! = n \cdot (n-1)! \Leftrightarrow n = 2$$

b) INCORRETA

$$f(n) = g(n) \Leftrightarrow \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n-2 = 2 \Leftrightarrow n = 4$$

Logo, o polígono é um quadrado.

c) INCORRETA

$$\log_2\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = \log_2\left(\frac{\frac{180^\circ(n-2)}{n}}{\frac{360^\circ}{n}}\right) = \log_2\left(\frac{n-2}{2}\right) = \log_2(n-2) - \log_2 2 = \log_2(n-2) - 1 \text{ (F)}$$

$$\frac{g(n)}{f(n)}=\frac{\frac{360^\circ}{n}}{\frac{180^\circ(n-2)}{n}}=\frac{2}{n-2}\Rightarrow\frac{g(10)}{f(10)}=\frac{2}{10-2}=\frac{1}{4}\ \text{(F)}$$

d) CORRETA

$$f(n_1)=f(n_2)\Leftrightarrow\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}=\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}\Leftrightarrow n_1n_2-2n_2=n_1n_2-2n_1\Leftrightarrow n_1=n_2$$

$\Rightarrow f$ é uma função injetora.

$\text{sen}(f(n)+g(n))=\text{sen}180^\circ=0$

e) INCORRETA

A função $(gof)(n)=g(f(n))$ somente estará definida quando $f(n)\in D=\{n\in\mathbb{N}/n\geq 3\}$, ou seja, $f(n)$ deve ser um número inteiro maior ou igual a 3. Entretanto, $f(n)$ não é sempre um número inteiro. Veja o contra-exemplo: $f(7)=\frac{180^\circ(7-2)}{7}=128\frac{4}{7}^\circ$.

11) O aspirante João Paulo possui, em mãos, R\$ 36,00 em moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos. Aumentando-se em 30% a quantidade de moedas de 10, 25 e 50 centavos, o aspirante passou a ter R\$ 46,65. Quando o aumento da quantidade de moedas de 5, 10 e 25 centavos foi de 50%, o aspirante passou a ter R\$ 44,00 em mãos. Considerando o exposto acima, a quantidade mínima de moedas de 50 centavos que o aspirante passou a ter em mãos é

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Sejam x, y, z e w as quantidades originais de moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos, respectivamente.

$$\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\5x+10\cdot1,3y+25\cdot1,3z+50\cdot1,3w=4665\\5\cdot1,5x+10\cdot1,5y+25\cdot1,5z+50w=4400\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\5x+13y+32,5z+65w=4665\quad(L2-1,3L1)\\7,5x+15y+37,5z+50w=4400\ (L3-1,5L1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10y+25z+50w=3600\\-1,5x=-15\Leftrightarrow x=10\\-25w=-1000\Leftrightarrow w=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+5z=310\\x=10\\w=40\end{cases}$$

Logo, a quantidade mínima de moedas de 50 centavos que o aspirante passou a ter em mãos é 40.

Note que, como o examinador se referiu à "quantidade mínima de moedas de 50 centavos que o aspirante passou a ter em mãos", seria razoável interpretar que essa quantidade mínima seria a após o aumento de 30%, ou seja, $40\cdot1,3=52$, que não aparece nas alternativas. Optou-se por apresentar

como resposta a quantidade original de moedas de 50 centavos, que seria, dentre as três situações apresentadas, aquela em que o aspirante teve em mãos a menor quantidade de moedas desse valor.

12) A matriz quadrada A, de ordem 3, cujos elementos a_{ij} são números reais, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i! - j! & \text{se } i > j \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{j}\right) & \text{se } i \le j \end{cases}$. É correto afirmar que:

a) A não é inversível.

b) O determinante da matriz A^2 vale 8.

c) O sistema linear homogêneo $AX = 0$, onde $X = (x_{ij})_{3\times1}$ e $0 = (o_{ij})_{3\times1}$ é possível e indeterminado.

d) $\log_2\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i2}\right) + \sum_{j=1}^{3} \log_2(a_{j3}) = -1$.

e) Nenhuma das linhas de A^T forma uma P.A. e nenhuma das colunas de A forma uma P.G..

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Calculemos os elementos da matriz A,

$$a_{11} = \cos\pi = -1,\ a_{12} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ a_{13} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = 2! - 1! = 1,\ a_{22} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ a_{23} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_{31} = 3! - 1! = 5,\ a_{32} = 3! - 2! = 4,\ a_{33} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a matriz A será dada por $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 5 & 4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Vejamos agora cada um dos itens do problema.

a) (FALSO) $\det A = 6 \neq 0$, portanto A é inversível.

b) (FALSO) $\det A^2 = (\det A)^2 = 36$.

c) (FALSO) $\det A \neq 0$ e, portanto, pela regra de Cramer, o sistema $AX = 0$ é possível e determinado.

d) (VERDADEIRO)

$\log_2(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = \log_2 4 = 2$ e $\log_2 a_{13} + \log_2 a_{23} + \log_2 a_{33} = \log_2(a_{13}.a_{23}.a_{33}) = \log_2(1/8) = -3$, logo $\log_2\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i2}\right) + \sum_{j=1}^{3} \log_2(a_{j3}) = -1$.

e) (FALSO) A terceira coluna de A forma uma PG de razão 1 e primeiro termo $\frac{1}{2}$.

13) A taxa de depreciação $\frac{dV}{dt}$ de determinada máquina é inversamente proporcional ao quadrado de $t+1$, onde V é o valor, em reais, da máquina t anos depois de ter sido comprada. Se a máquina foi comprada por $R\$ 500.000,00$ e seu valor decresceu $R\$ 100.000,00$ no primeiro ano, qual o valor estimado da máquina após 4 anos?

a) $R\$ 350.000,00$
b) $R\$ 340.000,00$
c) $R\$ 260.000,00$
d) $R\$ 250.000,00$
e) $R\$ 140.000,00$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\frac{dV}{dt} = k.\frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow \int_0^t \frac{dV}{ds} ds = k\int_0^t \frac{1}{(s+1)^2} ds \Rightarrow V(t) - V(0) = -k(s+1)^{-1}\Big|_0^t \Rightarrow V(t) - V(0) = k\frac{t}{t+1}$$

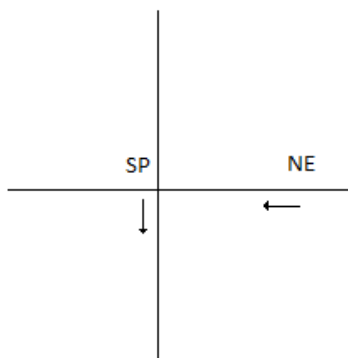
Como o valor decresceu $R\$ 100.000,00$ no primeiro ano, então $-100.000 = V(1) - V(0) = k.\frac{1}{2} \Rightarrow k = -200.000$.

Portanto, tomando $V(0) = 500.000$ e $t = 4$ teremos $V(4) = 340.000$.

14) Ao meio dia, o navio NE-Brasil encontra-se a 100 km a leste do navio Aeródromo São Paulo. O NE-Brasil navega para oeste com a velocidade de 12 km/h e o São Paulo para o sul a 10 km/h. Em que instante, aproximadamente, os navios estarão mais próximos um do outro?

a) $5,3\text{ h}$
b) $5,1\text{ h}$
c) $4,9\text{ h}$
d) $4,4\text{ h}$
e) $4,1\text{ h}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Considerando os eixos coordenados da figura abaixo,

A posição do navio NE-Brasil após um tempo t (em horas) será dada por $x = 100 - 12t$ e a posição do navio Aeródromo São Paulo é dada por $y = -10t$.
Desta forma, o quadrado da distância entre eles será dado por:
$(100-12t)^2 + (-10t)^2 = 244t^2 - 2400t + 10000$
O valor mínimo do quadrado da distância ocorrerá quando $t = -\frac{-2400}{2.244} \simeq 4,9h$.
Obviamente, quando o quadrado da distância atinge seu mínimo, a própria distância também atinge o mínimo.

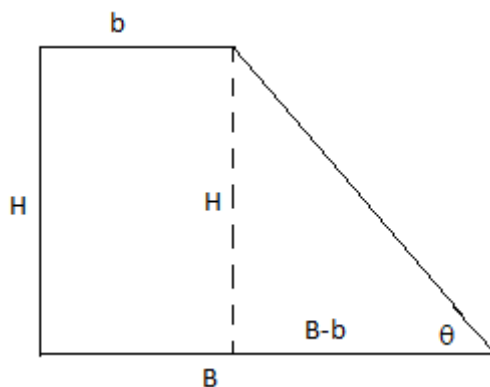
15) Sendo $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $z = \{i^{8n-5} + i^{4n-8}\}^3 + 2i$ e $P(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 11$ um polinômio sobre o conjunto dos números complexos, então $P(z)$ vale
a) $-167 + 4i$
b) $41 + 0i$
c) $-167 - 4i$
d) $41 + 2i$
e) $0 + 4i$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$$z = \left(i^{8n-5} + i^{4n-8}\right)^3 + 2i = \left(\frac{i^{8n}}{i^5} + \frac{i^{4n}}{i^8}\right)^3 + 2i = \left(\frac{1}{i} + 1\right)^3 + 2i = (1-i)^3 + 2i = -2$$
$$\Rightarrow P(z) = P(-2) = -2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 11 = 41 + 0 \cdot i.$$

16) As bases de um tronco de pirâmide triangular regular têm de perímetro, respectivamente, $54\sqrt{3}$ m e $90\sqrt{3}$ m. Se θ é o ângulo formado pela base maior com cada uma das faces laterais e a altura do tronco medindo $6\sqrt{3}$ m, então $tg^2\,\theta$ vale
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) 1
d) $\sqrt{3}$
e) 3

RESPOSTA: e

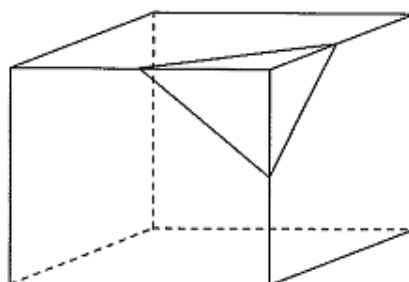
RESOLUÇÃO:
Considerando o corte formado pelos dois centros das bases e os pés das alturas de cada base teremos a figura abaixo,

onde, H é a altura do tronco, b é um terço da altura da base menor, B é um terço da altura da base maior e θ é o ângulo entre a base maior e a face lateral.

Como a pirâmide que gera o tronco é regular, então os triângulos das bases são equiláteros de lados $3p = 54\sqrt{3} \Rightarrow p = 18\sqrt{3}$ e $3q = 90\sqrt{3} \Rightarrow q = 30\sqrt{3}$.

Assim, $b = 9$, $B = 15$ e $H = 6\sqrt{3}$, o que nos dá $\text{tg}\theta = \frac{6\sqrt{3}}{15-9} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}^2\theta = 3$.

17) Considere um cubo maciço de aresta $a = 2\text{ cm}$. Em cada canto do cubo, corte um tetraedro, de modo que este tenha um vértice no respectivo vértice do cubo e os outros vértices situados nos pontos médios das arestas adjacentes, conforme ilustra a figura abaixo. A soma dos volumes desses tetraedros é equivalente ao volume de uma esfera, cuja área da superfície, em cm^2, mede

a) $4\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$

b) 4π

c) $4\sqrt[3]{\pi}$

d) $4\pi(\pi+1)$

e) $4\pi\sqrt[3]{\pi^2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

De acordo com o enunciado, cada tetraedro formado será tri-retângulo de aresta igual a 1 cm, cujo volume é $\frac{1}{6}$. Sendo assim, o volume total dos 8 tetraedros obtidos será $\frac{4}{3}$.

Desta forma, a esfera equivalente (mesmo volume) a esses 8 tetraedros terá o raio dado por, $\frac{4}{3}=\frac{4\pi}{3}R^3 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$. E, portanto, a área da mesma será $4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)=4\sqrt[3]{\pi}$.

18) Três números inteiros estão em P.G.. A soma destes números vale 13 e a soma dos seus quadrados vale 91. Chamando de n o termo do meio desta P.G., quantas comissões de n elementos, a Escola Naval pode formar com 28 professores do Centro Técnico Científico?
a) 2276
b) 3176
c) 3276
d) 19656
e) 19556

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Sejam (x, xq, xq^2) os números inteiros em PG, então

$$\begin{cases} x+xq+xq^2=13 \\ x^2+x^2q^2+x^2q^4=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)=13 \\ x^2\left(\frac{q^6-1}{q^2-1}\right)=91 \end{cases}.$$

Primeiramente, notemos que $q \neq \pm 1$, pois caso contrário, na segunda equação, x não será inteiro.
Dividindo a segunda equação do sistema pelo quadrado da primeira teremos:

$$\frac{13}{7}=\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)^2\left(\frac{q^2-1}{q^6-1}\right) \Leftrightarrow \frac{13}{7}=\frac{q^3-1}{q-1}\cdot\frac{q+1}{q^3+1} \Leftrightarrow \frac{13}{7}=\frac{q^2+q+1}{q^2-q+1}$$

$$\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0 \Leftrightarrow q=3 \vee q=\frac{1}{3}$$

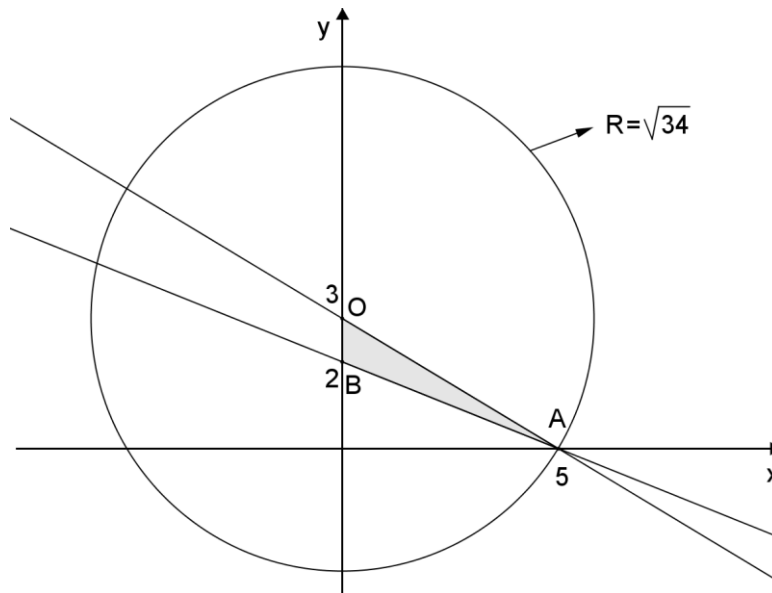
Para $q=3$, teremos, na primeira equação do sistema, $x=1$ e isso gera a sequência $(1,3,9)$.
Fazendo $q=\frac{1}{3}$, geraremos a sequência $(9,3,1)$.
Em qualquer dos casos, $n=3$ e o número de comissões com 3 elementos que podemos ser formadas com um grupo de 28 professores é $C_{28}^3=3276$.

19) A área da região interior à curva $x^2+y^2-6y-25=0$ e exterior à região definida pelo sistema de inequações $\begin{cases} 3x+5y-15\leq 0 \\ 2x+5y-10\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ vale

a) $\frac{72\pi-5}{2}$

b) $\frac{68\pi-15}{2}$
c) 68π
d) $\frac{72\pi-3}{2}$
e) $\frac{68\pi-5}{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Primeiramente, $x^2+y^2-6y-25=0 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=34$, ou seja, temos um círculo de centro (0,3) e raio $\sqrt{34}$. A circunferência e a região determinada pelo sistema inequações estão representadas na figura abaixo.

Portanto, a região interior ao círculo e exterior a região escura (região determinada pelo sistema) é dada por $34\pi-\frac{(3-2)\cdot 5}{2}=\frac{68\pi-5}{2}$.

20) Se $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4,\vec{v}_5 \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$, $\|\vec{v}_1\|=2$, $\|\vec{v}_2\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}_3\|=\sqrt{5}$, $\lambda=\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3$ e θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}_4=(5,\lambda,-7)$ e $\vec{v}_5=(1,-2,-3)$, então a área do paralelogramo formado, cujas arestas são representantes de $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$, vale
a) $4\sqrt{3}$
b) $\sqrt{6}$
c) $4\sqrt{6}$
d) $2\sqrt{3}$
e) 4

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}\Rightarrow\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)\cdot\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\|\vec{v}_1\|^2+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1+\|\vec{v}_2\|^2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_2+\|\vec{v}_3\|^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3\right)=0\Leftrightarrow 2\lambda=-12\Leftrightarrow\lambda=-6$$

Desta forma, $\vec{v}_4=(5,-6,-7)$ e a área do paralelogramo gerado por $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$ será dada pelo módulo do produto vetorial desses vetores.

$$\vec{v}_4\times\vec{v}_5=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -6 & -7\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=(4,8,-4)\Rightarrow S=\left|\vec{v}_4\times\vec{v}_5\right|=\sqrt{4^2+8^2+(-4)^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$$

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2010/2011

1) Sejam $f(x)=\ln(\cos x)^2$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ e $F(x)=\int \left[(f'(x))^2+\text{sen}^2 2x\right]dx$. Se $F(0)=\frac{7\pi}{8}-5$, então $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)$ vale

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 1

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\ln(\cos x)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(\cos x)^2}\cdot(2\cos x)\cdot(-\text{sen}\, x)=-2\,\text{tg}\, x$$

$$F(x)=\int\left[(f'(x))^2+\text{sen}^2 2x\right]dx=\int\left[4\,\text{tg}^2 x+\text{sen}^2 2x\right]dx=$$

$$=\int\left[4\sec^2 x-4+\frac{1-\cos 4x}{2}\right]dx=4\int d(\text{tg}\, x)-\frac{7}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4x dx=$$

$$=4\,\text{tg}\, x-\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{sen}\, 4x}{4}+C$$

$$F(0)=4\,\text{tg}\, 0-\frac{7}{2}\cdot 0-\frac{1}{8}\cdot\text{sen}(4\cdot 0)+C=C=\frac{7\pi}{8}-5$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(4\,\text{tg}\, x-\frac{7}{2}x-\frac{\text{sen}\, 4x}{8}+\frac{7\pi}{8}-5\right)=4-\frac{7\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}-5=-1$$

2) Considere a equação $x^2+bx+c=0$, onde c representa a quantidade de valores inteiros que satisfazem à inequação $|3x-4|\le 2$. Escolhendo-se o número b, ao acaso, no conjunto $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, qual é a probabilidade da equação acima ter raízes reais?

a) 0,50
b) 0,70
c) 0,75
d) 0,80
e) 1

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$|3x-4|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 3x-4\le 2 \Leftrightarrow 2\le 3x\le 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2$$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1,2\} \Rightarrow c = 2$

Se a equação $x^2 + bx + c = 0$ possui raízes reais, então $\Delta = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \geq 0 \Leftrightarrow b \leq -2\sqrt{2}$ ou $b \geq 2\sqrt{2}$.

No conjunto $\Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, os casos favoráveis são $A = \{-4,-3,3,4,5\}$, então $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{10} = 0,5$.

3) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, cujos determinantes são diferentes de zero. Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) $\det(-A) = (-1)^n \det A$, onde $-A$ é a matriz oposta de A.

( ) $\det A = -\det A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A.

( ) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, onde A^{-1} é a matriz inversa de A.

( ) $\det(3A \cdot B) = 3 \cdot \det A \cdot \det B$.

( ) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) (V) (F) (V) (F) (F)
b) (F) (F) (F) (V) (F)
c) (F) (V) (F) (V) (V)
d) (V) (V) (V) (F) (F)
e) (V) (F) (V) (F) (V)

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

(V) $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$, pois se A é uma matriz de ordem n, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$.

(F) O correto seria $\det A = \det A^t$.

(V) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, pois $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1 \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$ $\Leftrightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.

(F) $\det(3A \cdot B) = 3^n \det A \cdot \det B$

(F) Contraexemplo: $3 = \begin{vmatrix} 1+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$.

4) A inequação $x^2 - 6x \leq -x^2 + px + c$ tem como solução o intervalo $[0,2]$, onde $p, c \in \mathbb{R}$. Seja q a menor raiz da equação $4^{|x+1|} = 16 \cdot 2^{|x+1|} - 64$. A representação trigonométrica do número complexo $p + iq$ é

a) $2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right)$

b) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

d) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

e) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
A inequação $x^2-6x\le -x^2+px+c \Leftrightarrow 2x^2-(p+6)x-c\le 0$ tem solução $[0,2]$, então a equação $2x^2-(p+6)x-c=0$ tem raízes 0 e 2. Logo, $\frac{p+6}{2}=2\Leftrightarrow p=-2$ e $\frac{-c}{2}=0\Leftrightarrow c=0$.

$4^{|x+1|}=16\cdot 2^{|x+1|}-64 \Leftrightarrow \left(2^{|x+1|}\right)^2-16\cdot 2^{|x+1|}+64 \Leftrightarrow 2^{|x+1|}=8 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow x=-4 \;\vee\; x=2$
$\Rightarrow q=2$

$p+iq=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

5) Considere a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3i & -1\\ 2i & -2 & i\\ 1-2i & i & -i\end{pmatrix}$ com elementos no conjunto dos números complexos.

Sendo $n=|\det A|^2$, então o valor da expressão $\left[\text{tg}^2\frac{\pi n}{48}-\cos\left(\frac{2(n+5)\pi}{135}\right)-1\right]^3$ é

a) $-\frac{125}{216}$

b) $\frac{1}{216}$

c) $\frac{125}{216}$

d) $\frac{343}{216}$

e) $-\frac{1}{216}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$\det A=2i-3+6i+2-2+4i+1-6i=-2+6i$

$n = |\det A|^2 = 4 + 36 = 40$

$\text{tg}^2 \frac{n\pi}{48} = \text{tg}^2 \frac{40\pi}{48} = \text{tg}^2 \frac{5\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$\cos\left(\frac{2(n+5)\pi}{135}\right) = \cos\frac{2 \cdot 45\pi}{135} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\left[\text{tg}^2 \frac{n\pi}{48} - \cos\left(\frac{2(n+5)\pi}{135}\right) - 1\right]^3 = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right]^3 = \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{1}{216}$

6) Seja L uma lata de forma cilíndrica, sem tampa, de raio da base r e altura h. Se a área da superfície de L mede $54\pi a^2 \text{ cm}^2$, qual deve ser o valor de $\sqrt{r^2 + h^2}$, para que L tenha volume máximo?

a) a cm
b) 3a cm
c) 6a cm
d) 9a cm
e) 12a cm

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$S = 2\pi rh + \pi r^2 = 54\pi a^2 \Leftrightarrow 2rh + r^2 = 54a^2 \Leftrightarrow h = \frac{54a^2 - r^2}{2r}$

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54a^2 - r^2}{2r} = \frac{\pi}{2}\left(54a^2 r - r^3\right) \Rightarrow V' = 54a^2 - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 18a^2 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\,|a|$

$V'' = \frac{\pi}{2} \cdot (-6r) = -3\pi r < 0$, logo trata-se de um ponto de máximo.

$h = \frac{54a^2 - r^2}{2r} = \frac{54a^2 - 18a^2}{2 \cdot 3\sqrt{2}\,|a|} = 3\sqrt{2}\,|a| \Rightarrow \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{18a^2 + 18a^2} = 6|a|$

Assumindo que a seja positivo, então $\sqrt{r^2 + h^2} = 6a \text{ cm}$.

7) Uma progressão geométrica infinita tem o 4° termo igual a 5. O logaritmo na base 5 do produto de seus 10 primeiros termos vale $10 - 15\log_5 2$. Se S é a soma desta progressão, então o valor de $\log_2 S$ é

a) $2 + 3\log_2 5$
b) $2 + \log_2 5$
c) $4 + \log_2 5$
d) $1 + 2\log_2 5$
e) $4 + 2\log_2 5$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja uma PG (a_n) de razão q e cujo quarto termo é $a_4 = 5$.

O produto dos seus 10 primeiros termos é $P_{10} = (a_1 \cdot a_{10})^{\frac{10}{2}} = (a_1{}^2 \cdot q^9)^5 = a_1^{10} \cdot q^{45}$ e o seu logaritmo na base 5 é $\log_5 P_{10} = \log_5(a_1^{10} \cdot q^{45}) = 10 - 15\log_5 2 = \log_5 5^{10} - \log_5 2^{15} = \log_5 \frac{5^{10}}{2^{15}}$

$a_1^{10} \cdot q^{45} = \frac{5^{10}}{2^{15}} \Leftrightarrow a_1^2 \cdot q^9 = \frac{5^2}{2^3} = \frac{25}{8}$.

O quarto termo é $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 5$. Logo, $\frac{a_1^2 \cdot q^9}{(a_1 \cdot q^3)^2} = \frac{\frac{25}{8}}{5^2} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$.

Assim, temos $a_4 = a_1 \cdot \frac{1}{8} = 5 \Leftrightarrow a_1 = 40$, a soma da PG é $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{40}{1-\frac{1}{2}} = 80$ e

$\log_2 S = \log_2 80 = \log_2(2^4 \cdot 5) = 4 + \log_2 5$.

8) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2 - \text{arc}\,\text{sen}(x^2 + 2x)$ com $\frac{-\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18}$ e $g(x) = f(3x)$. Seja L a reta normal ao gráfico da função g^{-1} no ponto $(2, g^{-1}(2))$, onde g^{-1} representa a função inversa da função g. A reta L contém o ponto

a) $(-1, 6)$
b) $(-4, -1)$
c) $(1, 3)$
d) $(1, -6)$
e) $(2, 1)$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Para encontrar o coeficiente angular da reta L normal ao gráfico de g^{-1} no ponto $(2, g^{-1}(2))$, devemos encontrar inicialmente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico nesse ponto que é igual ao valor da derivada de g^{-1} nesse ponto: $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))}$.

$$f(x) = 2 - \text{arcsen}(x^2 + 2x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}} \cdot (2x+2) = -\frac{2x+2}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}$$

$g(x) = f(3x) \Rightarrow g'(x) = f'(3x) \cdot 3$

$$\Rightarrow g'(x) = 3 \cdot \left[-\frac{2 \cdot (3x) + 2}{\sqrt{1 - \left((3x)^2 + 2 \cdot (3x)\right)^2}} \right] = \frac{-18x - 6}{\sqrt{1 - \left(9x^2 + 6x\right)^2}}$$

$g^{-1}(2) = x \Leftrightarrow g(x) = 2 \Leftrightarrow f(3x) = 2 \Leftrightarrow 2 - \text{arcsen}\left(9x^2 + 6x\right) = 2 \Leftrightarrow \text{arcsen}\left(9x^2 + 6x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{2}{3}$

$-\frac{\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g^{-1}(2) = 0$

$$\Rightarrow g'\left(g^{-1}(2)\right) = g'(0) = \frac{-18 \cdot 0 - 6}{\sqrt{1 - \left(9 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0\right)^2}} = -6$$

$$\Rightarrow \left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{(-6)} = -\frac{1}{6}$$

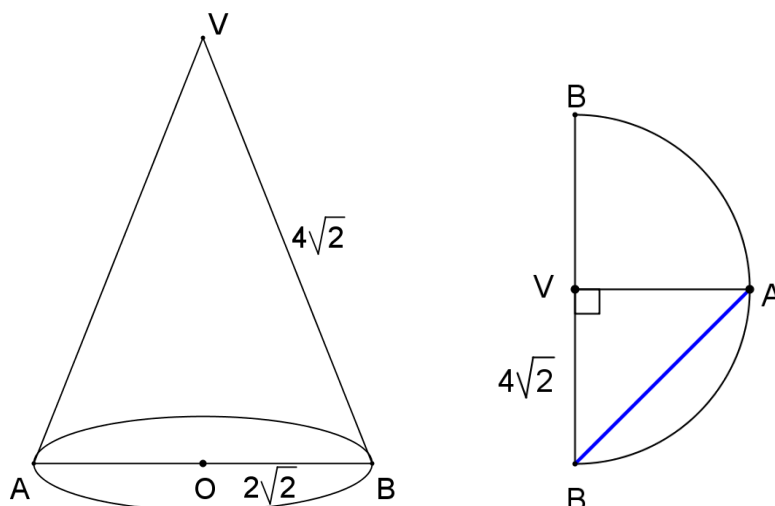
O coeficiente angular da reta L é o simétrico do inverso do coeficiente angular da reta tangente, ou seja, 6 e a reta L passa pelo ponto $\left(2, g^{-1}(2)\right) = (2, 0)$.

Assim, a equação de L é $\frac{y - 0}{x - 2} = 6 \Leftrightarrow y = 6x - 12$ e a reta contém o ponto $(1, -6)$.

9) Considere um cone circular reto com raio da base $2\sqrt{2}$ cm e geratriz $4\sqrt{2}$ cm. Sejam A e B pontos diametralmente opostos situados sobre a circunferência da base deste cone. Pode-se afirmar que o comprimento do menor caminho, traçado sobre a superfície lateral do cone e ligando A e B, mede, em cm,

a) $4\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}\pi$
c) 8
d) 4
e) $3\sqrt{3}\pi$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Para encontrar a menor distância entre A e B devemos planificar a superfície lateral do cone.
O comprimento da circunferência da base é $2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$ cm, logo o ângulo do setor do cone planificado é dado por $\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{2}} = \pi$ rad.

Como A e B são pontos diametralmente opostos, $B\hat{V}A = \frac{\pi}{2}$ rad $= 90^\circ$.

Logo, o menor caminho entre A e B é o segmento representado na figura planificada, $AB = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ cm.

10) Sejam a, b, c as raízes da equação $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Qual o valor de $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 1}$?

a) $\frac{2\sqrt{21}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{7}}{9}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{9}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja $S_n = a^n + b^n + c^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, temos:
$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 1 + 1 + 1 = 3$

$$S_1 = a^1 + b^1 + c^1 = \frac{-(-4)}{12} = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2\cdot(ab+ac+bc) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{-3}{12}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{11}{18}$$

Pela fórmula de Newton, temos:

$$12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow 12\cdot S_n - 4\cdot S_{n-1} - 3\cdot S_{n-2} + 1\cdot S_{n-3} = 0$$

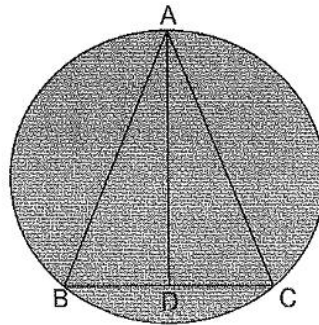
$$n = 3 \Rightarrow 12\cdot S_3 - 4\cdot S_2 - 3\cdot S_1 + 1\cdot S_0 = 0 \Leftrightarrow S_3 = \frac{1}{12}\cdot(4\cdot S_2 + 3\cdot S_1 - S_0) = \frac{1}{12}\cdot\left(4\cdot\frac{11}{18} + 3\cdot\frac{1}{3} - 3\right) = \frac{1}{27}$$

Logo, $S_3 = a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{27}$ e $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + 1} = \frac{2\sqrt{21}}{9}$.

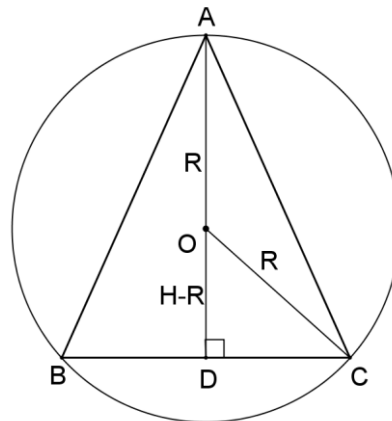
A questão também pode ser resolvida da seguinte maneira, aplicando-se um teorema de cálculo diferencial. Seja $p(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 \Rightarrow p'(x) = 36x^2 - 8x - 3$. A soma dos cubos das raízes de $p(x) = 0$ é igual ao coeficiente de $\frac{1}{x^{3+1}} = \frac{1}{x^4}$ na expansão de $\frac{p'(x)}{p(x)}$.

$$
\begin{array}{l|l}
36x^2 - 8x \;\; -3 & 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 \\ \hline
-36x^2 + 12x + 9 - 3/x & \frac{3}{x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{22}{36x^3} + \frac{1}{27x^4} + \cdots \\
\quad 4x \;\; +6 \;\; -3/x & \\
\quad -4x + 4/3 \;\; +1/x \;\; -1/3x^2 & \\
\qquad 22/3 \;\; -2/x \;\; -1/3x^2 & \\
\qquad -22/3 + 22/9x + 22/12x^2 - 22/36x^3 & \\
\qquad\quad 4/9x \;\; +3/2x^2 \;\; -22/36x^3 & \\
\qquad\quad -4/9x \;\; +4/27x^2 \;\; +1/9x^3 \;\; -1/27x^4 & \\
\qquad\quad \cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

Logo, $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{27}$ e $\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + 1} = \frac{2\sqrt{21}}{9}$.

11) Considere o triângulo isósceles ABC inscrito em um círculo, conforme figura abaixo. Suponha que o raio do círculo cresce a uma taxa de $3\,\text{cm/s}$ e a altura $\overline{AD}$ do triângulo cresce a uma taxa de $5\,\text{cm/s}$. A taxa de crescimento da área do triângulo no instante em que o raio e a altura $\overline{AD}$ medem, respectivamente, 10 cm e 16 cm, é

a) $78\,\text{cm}^2/\text{s}$
b) $76\,\text{cm}^2/\text{s}$
c) $64\,\text{cm}^2/\text{s}$
d) $56\,\text{cm}^2/\text{s}$
e) $52\,\text{cm}^2/\text{s}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Sejam $\overline{AD} = H$, R o raio do círculo circunscrito ao ΔABC de circuncentro O e $\overline{BC} = 2x$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔODC, temos: $x^2 + (H-R)^2 = R^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2RH - H^2}$.
A área triângulo ABC é dada por: $S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{2x \cdot H}{2} = H \cdot \sqrt{2RH - H^2}$.
A taxa de crescimento da área do triângulo é:

$$\frac{dS_{ABC}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(H \cdot \sqrt{2RH - H^2}\right) = \frac{dH}{dt} \cdot \sqrt{2RH - H^2} + H \cdot \frac{1}{2\sqrt{2RH - H^2}} \cdot \left(2\frac{dR}{dt}H + 2R\frac{dH}{dt} - 2H\frac{dH}{dt}\right)$$

$$\frac{dS_{ABC}}{dt} = \frac{dH}{dt} \cdot \sqrt{2RH - H^2} + \frac{H}{\sqrt{2RH - H^2}} \cdot \left(\frac{dR}{dt}H + R\frac{dH}{dt} - H\frac{dH}{dt}\right)$$

Do enunciado temos: $R = 10\text{ cm}$, $H = 16\text{ cm}$, $\frac{dR}{dt} = 3\text{ cm/s}$ e $\frac{dH}{dt} = 5\text{ cm/s}$. Logo,

$$\frac{dS_{ABC}}{dt} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 16 - 16^2} + \frac{16}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 16 - 16^2}}(3 \cdot 16 + 10 \cdot 5 - 16 \cdot 5) = 40 + 2 \cdot 18 = 76 \text{ cm}^2/\text{s} .$$

12) Considere o sistema $\begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ 2x + (2-k)y + 2z = 0 \\ x + y + (1-k)z = 0 \end{cases}$, onde $k \in \mathbb{R}$. O conjunto de equações que permitem ao sistema admitir solução não trivial é

a) $x = -y + z$ ou ($x + y + 3x = 0$ e $y - z = 0$)
b) $x = y - z$ ou ($x - y + 3z = 0$ e $y + 2z = 0$)
c) $x = -y - z$ ou ($x + y + 3z = 0$ e $y + z = 0$)
d) $x = -y - z$ ou ($x + y - 3z = 0$ e $y - 2z = 0$)
e) $x = -y - z$ ou ($x - y - 3z = 0$ e $y - z = 0$)

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Para que um sistema homogêneo admita solução não trivial, ele não pode ser de Cramer. Assim, o determinante da matriz incompleta do sistema deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} (1-k) & 1 & 1 \\ 2 & (2-k) & 2 \\ 1 & 1 & (1-k) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k)^2(2-k) + 2 + 2 - (2-k) - 2(1-k) - 2(1-k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^3 - 4k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \lor k = 4$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

$$k = 4 \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \\ -4y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Logo, $x = -y - z$ ou $(x + y - 3z = 0 \text{ e } y - 2z = 0)$.

13) A curva de equação $x^2 - 14 = y^2 + 2x$ intercepta a reta $4y + 1 = x$ nos pontos A e B. Seja C a circunferência com centro no ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e cujo raio é a medida do maior eixo da curva de equação $x^2 + 2y^2 = 2\sqrt{3}x - 8y - 2$. A circunferência C tem por equação

a) $x = \dfrac{35 - x^2 - y^2}{2}$

b) $x = \dfrac{20 - x^2 - y^2}{2}$

c) $x = \dfrac{x^2 + y^2 - 25}{2}$

d) $x = \dfrac{x^2 + y^2 - 35}{2}$

e) $x = \dfrac{25 - x^2 - y^2}{2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, devemos identificar os pontos A e B de interseção entre as curvas $x^2 - 14 = y^2 + 2x$ e $4y + 1 = x$. Assim, temos:

$$(4y+1)^2 - 14 = y^2 + 2 \cdot (4y+1) \Leftrightarrow 16y^2 + 8y + 1 - 14 = y^2 + 8y + 2 \Leftrightarrow 15y^2 = 15 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$y = -1 \Leftrightarrow x = 4 \cdot (-1) + 1 = -3 \Leftrightarrow A = (-3, -1)$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x = 4 \cdot 1 + 1 = 5 \Leftrightarrow B = (5, 1)$$

Seja O o centro da circunferência C, então O é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, donde $O = \left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{-1+1}{2} \right) = (1, 0)$.

Analisando a equação $x^2 + 2y^2 = 2\sqrt{3}x - 8y - 2$, temos:

$$x^2 + 2y^2 = 2\sqrt{3}x - 8y - 2 \Leftrightarrow \left(x^2 + 2\sqrt{3}x + 3\right) + 2\left(y^2 + 4y + 4\right) = -2 + 3 + 8$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + 2(y+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \sqrt{3}\right)^2}{3^3} + \frac{(y+2)^2}{\left(3/\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

Logo, a equação representa uma elipse de eixo maior $2 \cdot 3 = 6$.
A equação da circunferência C será dada por:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 36 \Leftrightarrow x = \frac{x^2 + y^2 - 35}{2}$$

14) Sejam C_1 e C_2 dois cones circulares retos e P uma pirâmide hexagonal regular de aresta da base a. Sabe-se que C_1 é circunscrito à P, C_2 é inscrito em P e C_1, C_2 e P têm a mesma altura H. A razão da diferença dos volumes de C_1 e C_2 para o volume da pirâmide P é

a) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$

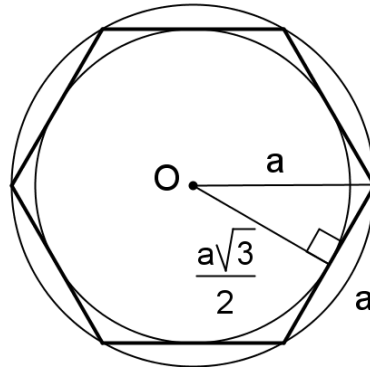
b) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$

e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A figura abaixo mostra as bases dos dois cones e da pirâmide.

A circunferência interior é a base do cone C_2, o hexágono é a base da pirâmide P e a circunferência exterior é a base do cone C_1.

O lado do hexágono é a, o raio de C_1 é a e o raio de C_2 é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Os volumes dos três sólidos são dados por:

$$V_{C_1} = \frac{1}{3}\cdot\left(\pi a^2\right)\cdot H = \frac{1}{3}\pi a^2 H$$

$$V_{C_2} = \frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot H = \frac{1}{4}\pi a^2 H$$

$$V_P = \frac{1}{3}\cdot\left(6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\cdot H = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 H$$

Logo, $\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{V_P} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 H - \frac{1}{4}\pi a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 H} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

15) Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{-1+2\operatorname{sen} x}{1+2\operatorname{sen} x}}$ no universo $[0, 2\pi]$ e o conjunto solução da inequação $\frac{1}{\operatorname{cossec} x} - \frac{1}{\sec x} > 0$ para $0 < x < \pi$, com $x \neq \frac{\pi}{2}$. Pode-se afirmar que $B - A$ é igual a

a) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right[$

b) $\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

c) $\varnothing$

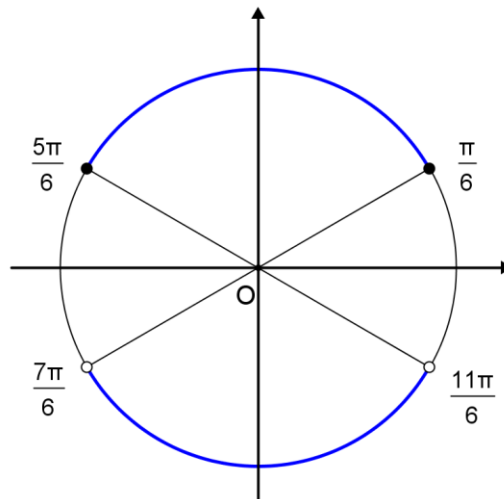
d) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[$

e) $\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right[$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

O domínio da função é $f(x)=\sqrt{\frac{-1+2\operatorname{sen}x}{1+2\operatorname{sen}x}}$ no universo $[0,2\pi]$ é o conjunto solução da inequação

$$\frac{-1+2\operatorname{sen}x}{1+2\operatorname{sen}x}\ge 0\Leftrightarrow \operatorname{sen}x<-\frac{1}{2}\ \vee\ \operatorname{sen}x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[.$$

Logo, $A=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[$.

O conjunto solução da inequação $\frac{1}{\operatorname{cossec}x}-\frac{1}{\sec x}>0$, para $0<x<\pi$, com $x\ne\frac{\pi}{2}$ é

$$\frac{1}{\operatorname{cossec}x}-\frac{1}{\sec x}>0\Leftrightarrow \operatorname{sen}x-\cos x>0\Leftrightarrow \operatorname{sen}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>0\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 0<x-\frac{\pi}{4}<\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$$

Como $0<x<\pi$ e $x\ne\frac{\pi}{2}$, então $B=\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Logo, $B-A=\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)-\left(\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[\right)=\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right[$.

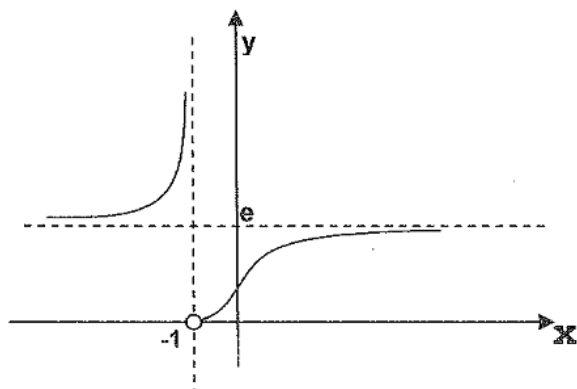
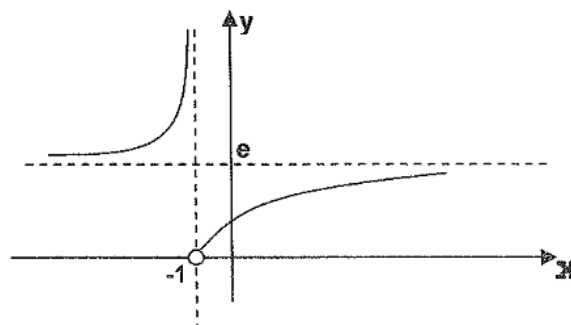
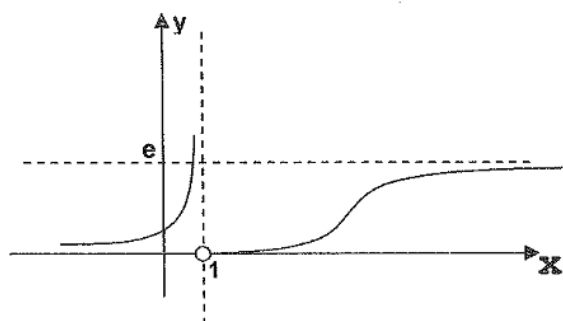
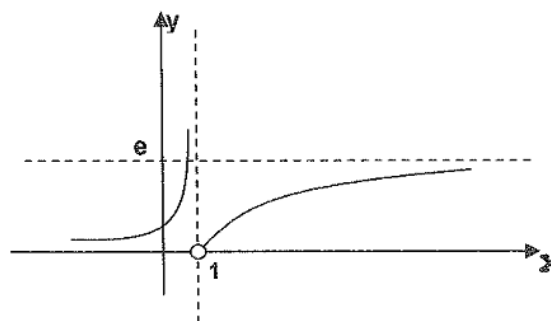
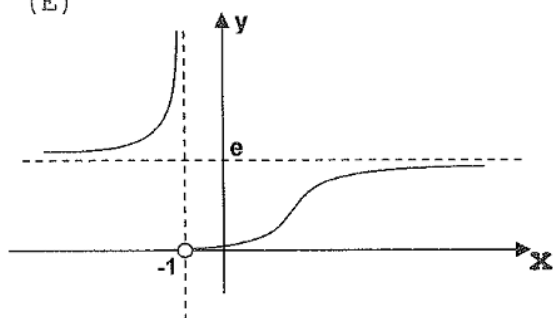
16) A figura que melhor representa o gráfico da função $y = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ é:

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$y = f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

$f(0) = e^{\frac{0-1}{0+1}} = \frac{1}{e}$ (isso elimina a alternativa (E))

$f(1) = e^{\frac{1-1}{1+1}} = 1$ (isso elimina as alternativas (C) e (D))

Temos que determinar a alternativa correta dentre as opções (A) e (B). A diferença entre elas é que a alternativa (A) apresenta mudança de concavidade em 0 e a alternativa (B) não. A mudança de concavidade é determinada por uma mudança de sinal da segunda derivada da função.
A análise da função mostra que temos um ponto de descontinuidade e, consequentemente, uma assíntota vertical em $x=-1$.

Como $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$, a função possui assíntota horizontal $y=e$.

$$f(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

A primeira derivada é sempre positiva, logo a função é sempre crescente.

$$f(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{2}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{4\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^3}\cdot\left(-1+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{-4x\cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^4}$$

Analisando a expressão da segunda derivada da função, conclui-se que $f''(x)<0$ se $x>0$ e $f''(x)>0$ se $x<0$. Assim, quando x é negativo, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e, quando x é positivo, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.
Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

17) Considere r e s retas no $\mathbb{R}^3$ definidas por $r:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ e $s:\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z=0\end{cases}$. Se θ é o ângulo formado pelas retas r e s, então $\text{cossec}\,\theta$ vale:

a) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt{6}$
c) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$
d) $\frac{\sqrt{42}}{6}$
e) $\frac{\sqrt{42}}{7}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases}x+y=z-1\\2x-y=-z\end{cases}\Leftrightarrow 3x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\ \wedge\ y=2x+z\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}+z$$

Escrevendo a equação da reta s na forma paramétrica, temos: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

O vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2,-1,3)$ e o vetor diretor da reta s é $\vec{s}(0,1,1)$.

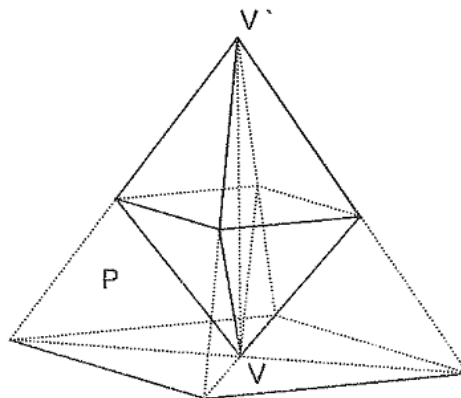
Seja θ o ângulo entre as retas r e s, então

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=|\vec{r}||\vec{s}|\cos\theta \Leftrightarrow 2\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot 1=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{6}{7}$$

Assumindo que θ é o menor ângulo entre as retas, então $0\le\theta\le\pi$ e $\operatorname{sen}\theta\ge 0$.

Portanto, temos: $\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \operatorname{cossec}\theta=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{42}}{6}$.

18) Considere um octaedro regular D, cuja aresta mede 6 cm e um de seus vértices V repousa sobre um plano α perpendicular ao eixo que contém V. Prolongando-se, até encontrar o plano α, as quatro arestas que partem do outro vértice V' de D (que se encontra na reta perpendicular a α em V), forma-se uma pirâmide regular P de base quadrada, conforme figura abaixo. A soma das áreas de todas as faces de D e P vale, em cm^2,

a) $12(15\sqrt{3}+12)$

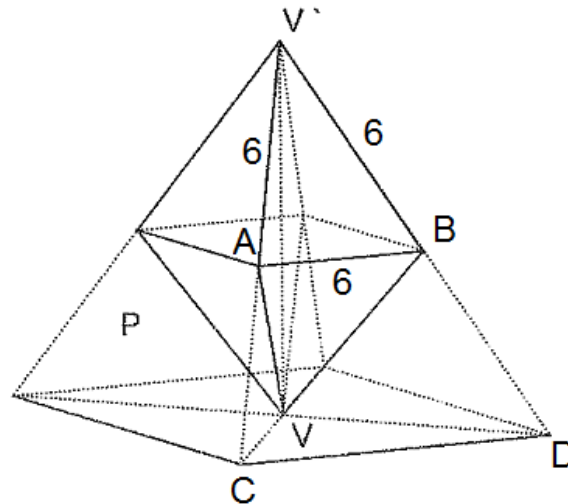
b) $144(\sqrt{3}+1)$

c) $72(3\sqrt{3}+2)$

d) $18(9\sqrt{3}+8)$

e) $36(2\sqrt{3}+4)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Seja M o ponto médio de $V'V$, então

$$\Delta V'MA \sim \Delta V'VC \Rightarrow \frac{V'A}{V'C} = \frac{V'M}{V'V} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V'C = 2 \cdot V'A = 2 \cdot 6 = 12$$

Analogamente, conclui-se que $V'D = 12$ e, consequentemente,

$$\Delta V'AB \sim \Delta V'CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{V'A}{V'C} = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = 2 \cdot AB = 2 \cdot 6 = 12.$$

A soma S das áreas das faces de D é igual à soma das áreas de 8 triângulos equiláteros de lado 6, a soma das áreas das faces de P é igual à soma das áreas de 4 triângulos equiláteros de lado 12 e um quadrado de lado 12. Assim, temos:

$$S = 8 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} + 12^2 = 216\sqrt{3} + 144 = 72\left(3\sqrt{3} + 2\right) \text{cm}^2.$$

19) Três cilindros circulares retos e iguais têm raio da base R, são tangentes entre si dois a dois e estão apoiados verticalmente sobre um plano. Se os cilindros têm altura H, então o volume do sólido compreendido entre os cilindros vale

a) $\dfrac{R^2H\left(4\sqrt{3}-\pi\right)}{4}$

b) $\dfrac{3\pi\sqrt{3}R^2H}{2}$

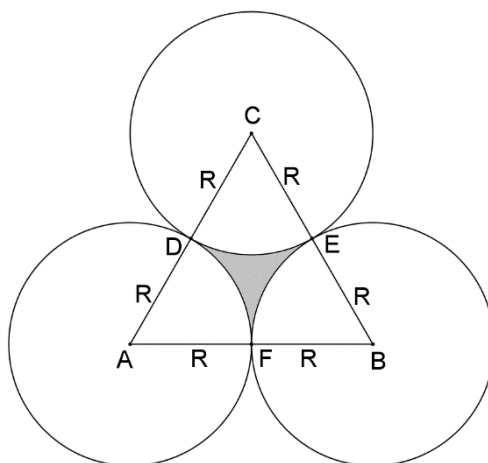
c) $\dfrac{R^2H\left(4\sqrt{3}-\pi\right)}{2}$

d) $\dfrac{R^2H\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{2}$

e) $\dfrac{R^2H\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Seja a figura abaixo a seção reta do sólido formado.

O sólido pedido é uma superfície cilíndrica reta de seção transversal dada pela área sombreada e altura H.
A área da seção sombreada é igual à área de um triângulo equilátero de lado $2R$ menos a área de três setores circulares de 60° e raio R, ou seja, $S=\frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi R^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^2$.

Logo, o volume pedido é dado por $V=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^2\cdot H=\frac{R^2H\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{2}$.

20) Considere f uma função definida no conjunto dos números naturais tal que $f(n+2)=3+f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(0)=10$ e $f(1)=5$. Qual o valor de $\sqrt{f(81)-f(70)}$?

a) $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{10}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{15}$
e) $3\sqrt{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} f(n+2)=3+f(n), \forall n\in\mathbb{N} \\ f(0)=10 \\ f(1)=5 \end{cases}$$

A sequência é formada por duas progressões aritméticas de razão 3, uma delas de primeiro termo $f(0)=10$ e a outra de primeiro termo $f(1)=5$.
Assim, teremos:
$f(2k)=f(0)+k\cdot 3=10+3k\Rightarrow f(70)=f(2\cdot 35)=10+3\cdot 35=115$ e
$f(2k+1)=f(1)+k\cdot 3=5+3k\Rightarrow f(81)=f(2\cdot 40+1)=5+3\cdot 40=125$.
Logo, $\sqrt{f(81)-f(70)}=\sqrt{125-115}=\sqrt{10}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – ESCOLA NAVAL – 2009/2010

1) Ao escrevermos $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{Cx+D}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ onde a_i, b_i, c_i $(1\le i\le 2)$ e A, B, C e D são constantes reais, podemos afirmar que A^2+C^2 vale:

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) 0

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

$$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2=(A+C)x^3+\left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)x^2+\left(A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D\right)x+(B+D)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+C=0\\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=1\Rightarrow-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C=1\Leftrightarrow C-A=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ A+C-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0\\ B+D=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\ C-A=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{4},\ A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow A^2+C^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

2) Sabendo que a equação $2x=3\sec\theta$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, define implicitamente θ como uma função de x, considere a função f de variável real x onde $f(x)$ é o valor da expressão $\frac{5}{2}\operatorname{cossec}\theta+\frac{2}{3}\operatorname{sen}2\theta$ em termos de x. Qual o valor do produto $\left(x^2\sqrt{4x^2-9}\right)f(x)$?

(A) $5x^3-4x^2-9$

(B) $5x^3+4x^2-9$

(C) $-5x^3-4x^2+9$
(D) $5x^3-4x^2+9$
(E) $-5x^3+4x^2-9$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$2x=3\sec\theta \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\sec\theta$$

$$x^2\sqrt{4x^2-9}=\left(\frac{3}{2}\sec\theta\right)^2\sqrt{4\cdot\left(\frac{3}{2}\sec\theta\right)^2-9}=\frac{9}{4}\sec^2\theta\sqrt{\cancel{4}\cdot\frac{9}{\cancel{4}}\sec^2\theta-9}=\frac{9}{4}\sec^2\theta\cdot 3\sqrt{\sec^2\theta-1}=$$

$$=\frac{27}{4}\sec^2\theta\cdot\sqrt{\text{tg}^2\,\theta}=\frac{27}{4}\sec^2\theta\cdot|\text{tg}\,\theta|$$

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow|\text{tg}\,\theta|=-\text{tg}\,\theta\Rightarrow x^2\sqrt{4x^2-9}=-\frac{27}{4}\sec^2\theta\cdot\text{tg}\,\theta$$

$$\left(x^2\sqrt{4x^2-9}\right)\cdot f(x)=-\frac{27}{4}\sec^2\theta\cdot\text{tg}\,\theta\cdot\left(\frac{5}{2}\csc\theta+\frac{2}{3}\text{sen}\,2\theta\right)=$$

$$=-\frac{135}{8}\sec^2\theta\cdot\frac{\cancel{\text{sen}\,\theta}}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{\text{sen}\,\theta}}-\frac{9}{\cancel{2}}\sec^2\theta\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cdot\cancel{2}\,\text{sen}\,\theta\cancel{\cos\theta}=$$

$$=-\frac{135}{8}\sec^3\theta-9\sec^2\theta\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)=-\frac{135}{8}\sec^3\theta-9\sec^2\theta+9=$$

$$=-\frac{135}{8}\left(\frac{2}{3}x\right)^3-9\left(\frac{2}{3}x\right)^2-9=-5x^3-4x^2+9$$

3) Sejam:

a) f uma função real de variável real definida por $f(x)=\text{arc tg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$, $x>1$ e

b) L a reta tangente ao gráfico da função $y=f^{-1}(x)$ no ponto $\left(0,f^{-1}(0)\right)$. Quanto mede, em unidades de área, a área do triângulo formado pela reta L e os eixos coordenados?

(A) $\frac{3}{2}$
(B) 3
(C) 1
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{4}{3}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$f^{-1}(0)=x \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \text{arctg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-x=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm\sqrt{3}$$

$$x>1 \Rightarrow x=\sqrt{3}$$

O ponto do gráfico de f^{-1} citado no enunciado é $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

$$y=f(x)=\text{arctg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right),\ x>1 \Rightarrow \text{tg}\, y=\frac{x^3}{3}-x \ \text{ e } \ y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Cálculo da derivada da função inversa:

$$\text{tg}\, x=\frac{y^3}{3}-y \Rightarrow \sec^2 x=\frac{3y^2}{3}y'-y' \Leftrightarrow y'=\frac{\sec^2 x}{y^2-1}$$

A derivada de f^{-1} em $\left(0,\sqrt{3}\right)$ é $y'=\frac{\sec^2 x}{y^2-1}=\frac{\sec^2 0}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{1}{2}$

A equação da reta L é dada, na forma segmentária, por:

$$y-\sqrt{3}=\frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow -\frac{x}{2}+y=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{-2\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$$

Logo, a área do triângulo determinado por L e pelos eixos coordenados é: $S=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3\text{ u.a.}$

Uma outra forma de obter a derivada da função inversa no ponto é derivar a expressão original em relação a y.

$$y=f(x)=\text{arctg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right) \Rightarrow 1=\frac{d}{dx}\text{arctg}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{\left(\frac{x^3}{3}-x\right)^2+1}\cdot\left(\frac{3x^2}{3}-1\right)\cdot\frac{dx}{dy} \Leftrightarrow 1=\frac{9\left(x^2-1\right)}{\left(x^3-3x\right)^2+9}\cdot\frac{dx}{dy} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\left(x^3-3x\right)^2+9}{9\left(x^2-1\right)}$$

$$x=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\left(\left(\sqrt{3}\right)^3-3\cdot\sqrt{3}\right)^2+9}{9\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-1\right)}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$$

4) Considere

a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ vetores não nulos no $\mathbb{R}^3$

b) a matriz $\left[v_{ij}\right]$ que descreve o produto escalar de $\vec{v}_i$ por $\vec{v}_j$, $1\le i\le 4$, $1\le j\le 4$, e que é dada abaixo:

$$\left[v_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 & -1 & 2 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

c) o triângulo PQR onde $\overrightarrow{QP}=\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{QR}=\vec{v}_3$.

Qual o volume do prisma, cuja base é o triângulo PQR e a altura h igual a duas unidades de comprimento?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(E) $\sqrt{5}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$v_{22}=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2=\left|\vec{v}_2\right|^2=2\Rightarrow\left|\vec{v}_2\right|=\sqrt{2}$$

$$v_{33}=\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3=\left|\vec{v}_3\right|^2=3\Rightarrow\left|\vec{v}_3\right|=\sqrt{3}$$

$$v_{23}=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3=\left|\vec{v}_2\right|\left|\vec{v}_3\right|\cos\theta=-1\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta=-1\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\left|\vec{v}_2\right|\left|\vec{v}_3\right|\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{PRISMA}=S_{PQR}\cdot h=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2=\sqrt{5}\text{ u.v.}$$

5) Os gráficos das funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x)=4-x^2$ e $g(x)=\frac{5-x}{2}$ interceptam-se nos pontos $A=(a,f(a))$ e $B=(b,f(b))$, $a\le b$. Considere os polígonos CAPBD onde C e D são as projeções ortogonais de A e B respectivamente sobre o eixo x e $P(x,y)$, $a\le x\le b$

um ponto qualquer do gráfico de f. Dentre esses polígonos, seja Δ, aquele que tem área máxima. Qual o valor da área de Δ, em unidades de área?

a) $\frac{530}{64}$

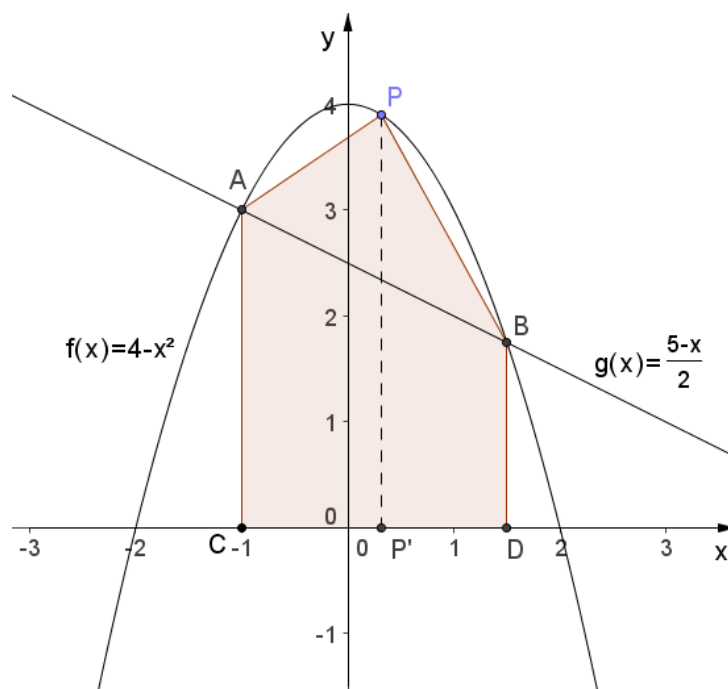
b) $\frac{505}{64}$

c) $\frac{445}{64}$

d) $\frac{125}{64}$

e) $\frac{95}{64}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=4-x^2 \\ g(x)=\frac{5-x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow 4-x^2=\frac{5-x}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A(-1,3) \text{ e } B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right) \Rightarrow C(-1,0) \text{ e } D\left(\frac{3}{2},0\right)$$

Seja $P(x,4-x^2), -1 \le x \le \frac{3}{2}$, então:

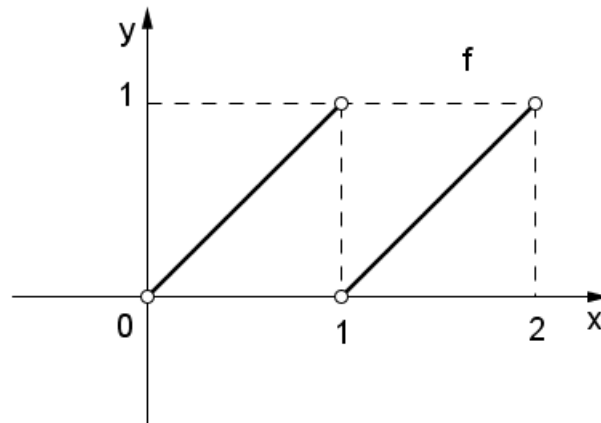
$$S_{CAPBD} = S_{CAPP'} + S_{P'PBD} = \frac{1}{2}\left(3+4-x^2\right)\left|x+1\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}+4-x^2\right)\left|x-\frac{3}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7-x^2\right)\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{23}{4}-x^2\right)\left(\frac{3}{2}-x\right) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{125}{16}$$

$$x_{MAX} = \frac{-5/8}{2\cdot(-5/4)} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta} = -\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{125}{16} = -\frac{5}{64} + \frac{5}{32} + \frac{125}{16} = \frac{505}{64} \text{ u.a.}$$

6) Considere a função real f de variável real e as seguintes proposições:
I) Se f é contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e tem um máximo local em $x = x_0$ então $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$.
II) Se f é derivável em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e $f'(x_0) = 0$ então f tem um máximo local ou um mínimo local em $x = x_0$.
III) Se f tem derivada estritamente positiva em todo o seu domínio então f é crescente em todo o seu domínio.
IV) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ é infinito então $\lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = 1$.
V) Se f é derivável $\forall x \in \mathbb{R}$, então $\lim_{s\to 0} \frac{f(x)-f(x-2s)}{2s} = 2f'(x)$.
Podemos afirmar que
(A) todas são falsas.
(B) todas são verdadeiras.
(C) apenas uma delas é verdadeira.
(D) apenas duas delas são verdadeiras.
(E) apenas uma delas é falsa.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
I) FALSA
Contra-exemplo: f tem máximo local em $x = x_0$ se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ e $f^{(4)}(x_0) < 0$
II) FALSA
Contra-exemplo: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então f tem ponto de inflexão em $x = x_0$.
III) FALSA
Contra-exemplo: Seja $f :]0,1[\cup]1,2[\to]0,1[$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in]0,1[\\ x-1, & \text{ se } x \in]1,2[\end{cases}$. f tem derivada estritamente positiva em todo o seu domínio, mas não é crescente em todo o seu domínio.

Uma afirmativa correta seria: "Se f é contínua no intervalo I e f tem derivada estritamente positiva em todo ponto interior a I, então f é estritamente crescente em I."

IV) FALSA

Contra-exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1+(x-a)\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=1 \\ g(x)=\dfrac{1}{x-a}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[1+(x-a)\right]^{\frac{1}{x-a}}=e$$

V) FALSA

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x)-f(x-2s)}{2s}=\lim_{2s\to 0}\frac{f(x)-f(x-2s)}{2s}=f'(x)$$

7) Nas proposições abaixo, coloque, na coluna à esquerda (V) quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

( ) Se duas retas r e s do $\mathbb{R}^3$ são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.

( ) Duas retas concorrentes no $\mathbb{R}^3$ determinam um único plano.

( ) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então os planos A e B são paralelos.

( ) Se duas retas r e s no $\mathbb{R}^3$ são paralelas a um plano A então r e s são paralelas.

Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F F V F F
b) V F V F F
c) V V V F F
d) F V V F V
e) F F V V V

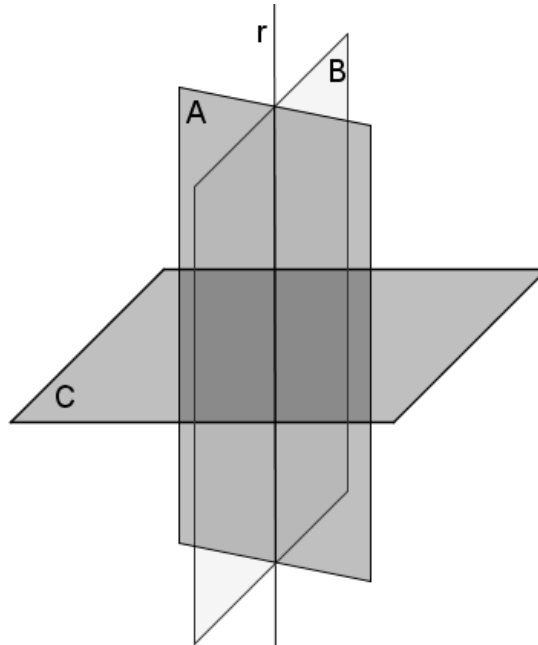
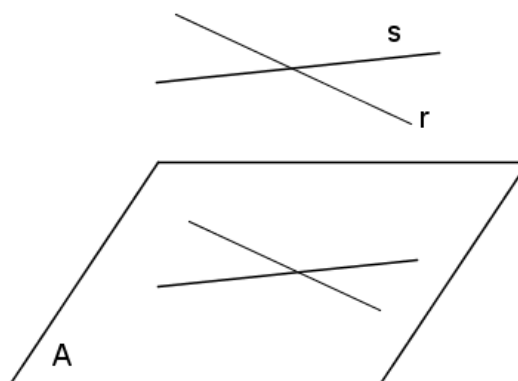
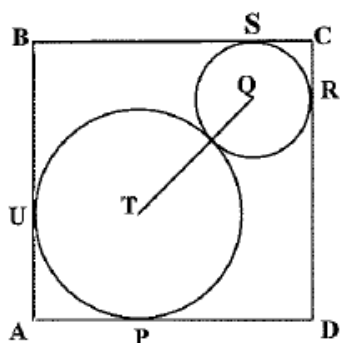
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

1ª) FALSA

Se os 3 pontos em comum forem colineares, os planos podem ser secantes.

2ª) FALSA

r e s podem ser reversas.
3ª) VERDADEIRA
Sobre duas retas concorrentes podem-se marcar 3 pontos não colineares, determinando um único plano.
4ª) FALSA
A e B podem ser secantes.

5ª) FALSA
r e s podem ser concorrentes.

8) As circunferências da figura abaixo possuem centro nos pontos T e Q, têm raios $3\,\text{cm}$ e $2\,\text{cm}$, respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do quadrado $ABCD$ nos pontos P, R, S e U.

Qual o valor da área da figura plana de vértices P, T, Q, R e D em cm^2?

(A) $\frac{7\sqrt{2}+18}{2\sqrt{2}}$

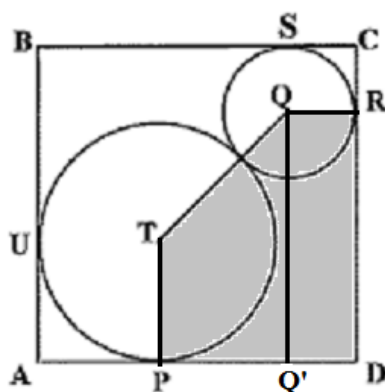
(B) $\frac{50\sqrt{2}+23}{8}$

(C) $\frac{15\sqrt{2}+2}{4}$

(D) $\frac{30\sqrt{2}+25}{4}$

(E) $\frac{50\sqrt{2}+49}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja Q' a projeção de Q sobre AD, então:

$$PQ' = \frac{TQ}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$QQ' = \frac{AT}{\sqrt{2}} = \frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} + 3$$

$$S_{PTQRD} = S_{PTQQ'} + S_{Q'QRD} = \frac{(PT + QQ') \cdot PQ'}{2} + QQ' \cdot QR = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} + \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right) \cdot 2 =$$

$$S_{PTQRD} = \frac{25}{\sqrt{2}} + \frac{49}{4} = \frac{50\sqrt{2} + 49}{4} \text{ cm}^2$$

9) Considere um tanque na forma de um paralelepípedo com base retangular cuja altura mede $0,5\text{ m}$, contendo água até a metade de sua altura. O volume deste tanque coincide com o volume de um tronco de pirâmide regular de base hexagonal, com aresta lateral 5 cm e áreas das bases $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$, respectivamente. Um objeto, ao ser imerso completamente no tanque faz o nível da água subir $0,05\text{ m}$. Qual o volume do objeto em cm^3?

(A) $\frac{51\sqrt{3}}{10}$

(B) $\frac{63\sqrt{3}}{10}$

(C) $\frac{78\sqrt{3}}{10}$

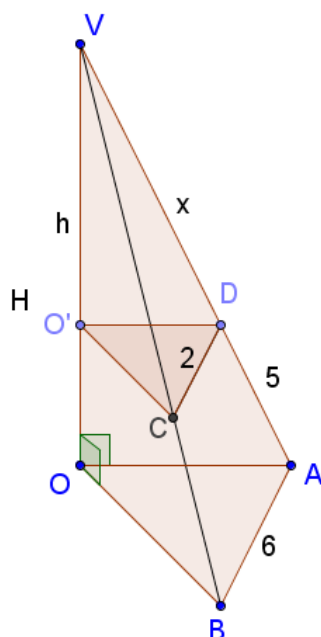
(D) $\frac{87\sqrt{3}}{10}$

(E) $\frac{91\sqrt{3}}{10}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Leftrightarrow L = 6$$

$$6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow l = 2$$

$\Delta VCD \sim \Delta VAB: \frac{x}{2} = \frac{x+5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$H^2 + 6^2 = \left(5 + \frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow H = \frac{9}{2}$

$h^2 + 2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{3}{2}$

$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\left(54\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} - 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = 78\sqrt{3}$

Seja S a área da base do tanque, então: $V_{TANQUE} = V_{TRONCO} \Leftrightarrow S \cdot 50 = 78\sqrt{3} \Leftrightarrow S = \frac{78\sqrt{3}}{50}$

Quando o nível do tanque sobe $0,05\text{ m} = 5\text{ cm}$ a variação de volume é:

$5 \cdot S = 5 \cdot \frac{78\sqrt{3}}{50} = \frac{78\sqrt{3}}{10}\text{ cm}^3$.

10) A figura abaixo mostra-nos um esboço da visão frontal de uma esfera, um cilindro circular reto com eixo vertical e uma pirâmide regular de base quadrada, que foram guardados em um armário com porta, que possui a forma de um paralelepípedo retângulo com as menores dimensões possíveis para acomodar aqueles sólidos. Sabe-se que esses sólidos são tangentes entre si; todos tocam o fundo e o teto do armário; apoiam-se na base do armário; são feitos de material com espessura desprezível; a esfera e a pirâmide tocam as paredes laterais do armário; 120 cm é a medida do comprimento do armário; $4\sqrt{11}\text{ dm}$ é a medida do comprimento da diagonal do armário; e a porta pode ser fechada sem resistência, então, a medida do volume do armário não ocupado pelos sólidos vale

(A) $\frac{2^4(2^5-5\pi)}{3}$ dm^3

(B) $\frac{2^4(2^5+5\pi)}{3}$ m^3

(C) $\frac{2^4(2^3-5\pi)}{5}$ dm^3

(D) $\frac{2^4(2^6+10\pi)}{6}$ dam^3

(E) $\frac{2^4(2^6-10\pi)}{6}$ dm^3

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Seja R o raio da esfera e da base do cilindro, e 2R a altura do cilindro e da pirâmide, assim como aresta da base da pirâmide.

$$d^2 = 144 + 4\cdot R^2 + 4\cdot R^2 = \left(4\sqrt{11}\right)^2 \Leftrightarrow R = 2 \text{ dm}$$

$$6R = 6\cdot 2 = 12 \text{ dm}$$

$$V = 4\cdot 4\cdot 12 - \frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 - \pi\cdot 2^2\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 4 = \frac{2^4(32-5\pi)}{3} \text{ dm}^3$$

11) Um triângulo retângulo está inscrito no círculo $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ e possui dois vértices sobre a reta $7x+y+5=0$. O terceiro vértice que está situado na reta de equação $-2x+y+9=0$ é

(A) $(7,4)$

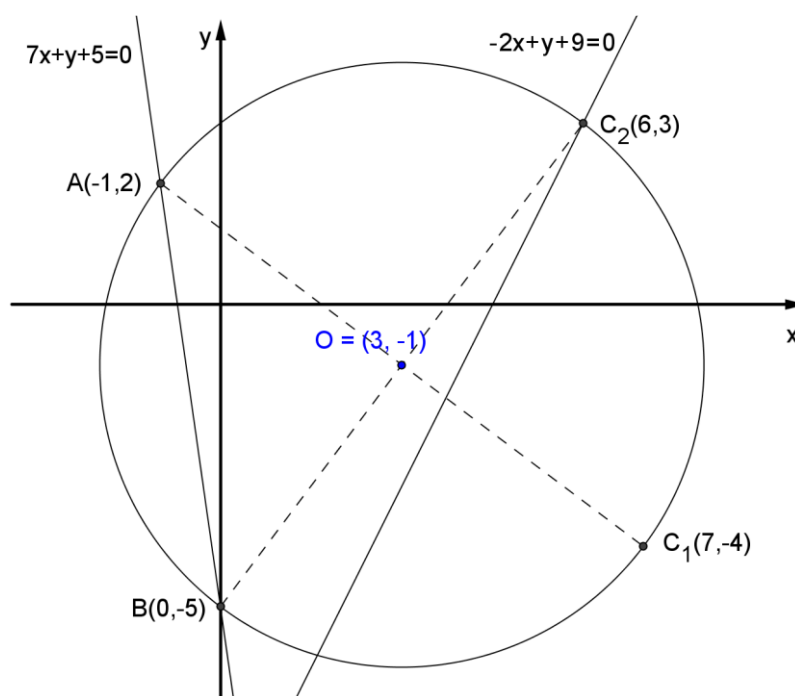
(B) $6,3$

(C) $(7,-4)$

(D) $(6,-4)$

(E) $(7,-3)$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$x^2+y^2-6x+2y-15=0 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1=15+9+1 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=25$$

Assim, o círculo possui centro $O(3,-1)$.

$7x+y+5=0 \Leftrightarrow y=-5-7x$

$x^2+y^2-6x+2y-15=0 \Rightarrow x^2+(-5-7x)^2-6x+2(-5-7x)-15=0$

$\Leftrightarrow 50x^2+50x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

$\Rightarrow A(-1,2)$ e $B(0,-5)$

Como a reta $7x+y+5=0$ não passa pelo centro do círculo, o terceiro vértice do triângulo pode ser determinado encontrando a interseção entre a determinada por um dos vértices A ou B e o círculo.

Reta passando por A e O: $\frac{y-(-1)}{x-3}=\frac{2-(-1)}{(-1)-3} \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=25 \Rightarrow (x-3)^2+\left(-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}+1\right)^2=25 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=7$$

$\Rightarrow C_1(7,-4)$

Reta passando por B e O: $\frac{y-(-1)}{x-3}=\frac{(-5)-(-1)}{0-3} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-5$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=25 \Rightarrow (x-3)^2+\left(\frac{4}{3}x-5+1\right)^2=25 \Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$$

$\Rightarrow C_2(6,3)$

Substituindo as coordenadas de C_1 e C_2, observa-se que apenas o ponto $C_2(6,3)$ encontra-se sobre a reta de equação $-2x+y+9=0$.

Vale observar que o ponto (6,3) é o único ponto dentre os que aparecem nas alternativas que pertence à reta $-2x+y+9=0$.

12) Considere as funções reais f e g de variável real definidas por $f(x)=\frac{\sqrt{e^{2x-1}-1}}{\ln(4-x^2)}$ e $g(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, respectivamente, A e B subconjuntos dos números reais, tais que A é o domínio da função f e B o conjunto onde g é crescente. Podemos afirmar que $A\cap B$ é igual a

(A) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

(B) $[1,2[\cup]2,+\infty[$

(C) $]2,+\infty[$

(D) $\left[1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$

(E) $\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\frac{\sqrt{e^{2x-1}-1}}{\ln\left(4-x^2\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{2x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow e^{2x-1}\ge e^0\Leftrightarrow 2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2} \\ 4-x^2>0\Leftrightarrow -2<x<2 \\ \ln\left(4-x^2\right)\ne 0\Leftrightarrow 4-x^2\ne 1\Leftrightarrow x\ne\pm\sqrt{3} \end{array}\right\}\Rightarrow A=D_f=\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$$

$$g(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow g'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow x<0\ \vee\ x>1\Rightarrow B=\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

$$A\cap B=\left(\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[\right)\cap\left(\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right)=\left]1,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$$

13) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões x, y e z expressas em unidades de comprimento e nesta ordem, formam uma P.G. de razão 2. Sabendo que a área total do paralelepípedo mede 252 unidades de área, qual o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}=(x-2,y-2,z-4)$ e $\vec{w}=(3,-2,1)$?

(A) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$

(B) $\operatorname{arcsen}\frac{5\sqrt{14}}{126}$

(C) $\text{arc tg } 2\sqrt{5}$
(D) $\text{arc tg} -5\sqrt{5}$
(E) $\text{arc sec}\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$\text{PG}: x, y, z \text{ de razão } 2 \Rightarrow y = 2x \ \wedge \ z = 4x$
$S_{\text{TOTAL}} = 2(xy + xz + yz) = 2(2x^2 + 4x^2 + 8x^2) = 28x^2 = 252 \Leftrightarrow x = 3$
Logo, $\vec{u} = (x-2, y-2, z-4) = (1,4,8)$ e $\vec{w} = (3,-2,1)$.
Sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, temos:
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} = \frac{(1,4,8)\cdot(3,-2,1)}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{9+4+1}} = \frac{3-\cancel{8}+\cancel{8}}{9\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{42} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{\sqrt{14}}{42}$$

14) No sistema decimal, a quantidade de números ímpares positivos menores que 1000, com todos os algarismos distintos é
(A) 360
(B) 365
(C) 405
(D) 454
(E) 500

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Há 5 números de 1 algarismo.
Há $\underline{8}\cdot\underline{5} = 40$ números de 2 algarismos
Há $\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{5} = 320$ números de 3 algarismos.
Então a quantidade de números que satisfazem à condição do enunciado é $5+40+320=365$.

15) Qual o valor de $\int \text{sen } 6x \cos x \, dx$?
(A) $-\dfrac{7\cos 7x}{2} - \dfrac{5\cos 5x}{2} + c$
(B) $\dfrac{7\,\text{sen } 7x}{2} + \dfrac{5\,\text{sen } 5x}{2} + c$
(C) $\dfrac{\text{sen } 7x}{14} + \dfrac{\text{sen } 5x}{10} + c$
(D) $-\dfrac{\cos 7x}{14} - \dfrac{\cos 5x}{10} + c$

(E) $\frac{7\cos 7x}{2}+\frac{5\cos 5x}{2}+c$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\text{sen}6x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\left(\text{sen}7x+\text{sen}5x\right)$$

$$\int \text{sen}6x\cdot\cos x dx=\frac{1}{2}\int\left(\text{sen}7x+\text{sen}5x\right)dx=\frac{1}{14}\int \text{sen}7x\,d\left(7x\right)+\frac{1}{10}\int \text{sen}5x\,d\left(5x\right)=$$

$$=\frac{1}{14}\left(-\cos 7x\right)+\frac{1}{10}\left(-\cos 5x\right)+c=-\frac{\cos 7x}{14}-\frac{\cos 5x}{10}+c$$

16) Considere x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{R}$ raízes da equação $64x^3-56x^2+14x-1=0$. Sabendo que x_1, x_2 e x_3 são termos consecutivos de uma P. G. e estão em ordem decrescente, podemos afirmar que o valor da expressão $\text{sen}\left[\left(x_1+x_2\right)\pi\right]+\text{tg}\left[\left(4x_1x_3\right)\pi\right]$ vale

(A) 0

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

(D) 1

(E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$\text{PG}: x_1, x_2, x_3$ de razão $0<q<1$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{a}{q}\\ x_2=a\\ x_3=aq\end{cases}\Rightarrow x_1\cdot x_2\cdot x_3=a^3=\frac{1}{64}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{4q}\\ x_2=\frac{1}{4}\\ x_3=\frac{q}{4}\end{cases}$$

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{4q}+\frac{1}{4}+\frac{q}{4}=\frac{56}{64}\Leftrightarrow 2+2q+2q^2=7q\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2\ \vee\ q=\frac{1}{2}$$

$$0<q<1\Rightarrow q=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{4}, x_3=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left[\left(x_1+x_2\right)\pi\right]+\text{tg}\left[\left(4x_1x_3\right)\pi\right]=\text{sen}\frac{3\pi}{4}+\text{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

17) Coloque F (falso) ou V (verdadeiro) nas afirmativas abaixo, assinalando a seguir a alternativa correta.

( ) Se A e B são matrizes reais simétricas então AB também é simétrica.

( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ cujo termo geral é dado por $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ então A é inversível.

( ) Se A e B são matrizes reais $n \times n$ então $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

( ) Se A é uma matriz real $n \times n$ e sua transposta é uma matriz inversível então a matriz A é inversível.

( ) Se A é uma matriz real quadrada e $A^2 = 0$ então $A = 0$.

Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (F) (F) (F)
(B) (V) (V) (V) (F) (V)
(C) (V) (V) (F) (F) (F)
(D) (F) (F) (F) (V) (F)
(E) (F) (F) (V) (V) (V)

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
1ª) FALSA

Contra-exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2ª) FALSA

Contra-exemplo (n=3): $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ A não é inversível

Note qua as linhas e colunas ou são iguais ou são simétricas.

3ª) FALSA

$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$

A expressão acima é diferente de $A^2 - B^2$, exceto quando A e B comutam ($AB = BA$).

4ª) VERDADEIRA

A^T é inversível $\Rightarrow \det\left(A^T\right) \neq 0$

$\Rightarrow \det A = \det\left(A^T\right) \neq 0 \Rightarrow$ A é inversível

5ª) FALSA

Contra-exemplo: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2$ e $A \neq 0$

18) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}$ cujos elementos são todas as soluções de $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}|2x+3| > \log_{\frac{1}{3}}|4x-1| \\ \dfrac{(x+4)^5}{(1-5x)^3\sqrt[3]{3x^2-x+5}} \le 0 \end{cases}$.

Podemos afirmar que S é um subconjunto de

(A) $]-\infty,-5[\,\cup\,]1,+\infty[$

(B) $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$

(C) $]-\infty,-5[\,\cup\,]3,+\infty[$

(D) $]-\infty,-3]\cup[2,+\infty[$

(E) $]-\infty,-2[\,\cup[4,+\infty[$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$\log_{\frac{1}{3}}|2x+3| > \log_{\frac{1}{3}}|4x-1| \Leftrightarrow |2x+3| < |4x-1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} : -2x-3 < -4x+1 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{4} : 2x+3 < -4x+1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{4} : 2x+3 < 4x-1 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x < -\frac{3}{2} \ \vee \ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{3} \ \vee \ x > 2$$

$$\frac{(x+4)^5}{(1-5x)^3\sqrt[5]{3x^2-x+5}} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{1-5x} \le 0 \Leftrightarrow x \le -4 \ \vee \ x > \frac{1}{5}$$

$$y = 3x^2-x+5 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 5 = -59 < 0 \Rightarrow y = 3x^2-x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$S = \left(\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{3}\right[\cup]2,+\infty[\right) \cap \left(]-\infty,-4] \cup \left]\frac{1}{5},+\infty\right[\right) =$$

$$=]-\infty,-4] \cup]2,+\infty[\subset]-\infty,-3] \cup [2,+\infty[$$

19) O raio de uma esfera em dm é igual à posição ocupada pelo termo independente de x no desenvolvimento de $\left(25^{\frac{1}{2}\left(\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)} + 5^{(1+\cos x)}\right)^{54}$ quando consideramos as potências de expoentes decrescentes de $25^{\frac{1}{2}\left(\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)}$. Quanto mede a área da superfície da esfera?

(A) $10,24\pi \ \text{m}^2$

(B) $115600\pi \ \text{cm}^2$

(C) $1444\pi \ \text{dm}^2$

(D) $1296\pi\ dm^2$
(E) $19,36\pi\ m^2$

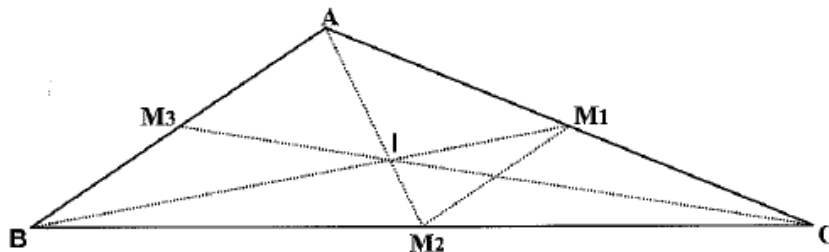
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left(25^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}+5^{(1+\cos x)}\right)^{54} \Rightarrow T_{p+1}=\binom{54}{p}5^{p(1+\cos x)}\cdot 25^{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)(54-p)}=\binom{54}{p}5^{p+p\cos x+(54-p)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$p+p\cos x+(54-p)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=p+p\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)+(54-p)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=2p+(54-3p)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

Para que o termo de ordem $(p+1)$ seja independente de x é necessário que $54-3p=0 \Leftrightarrow p=18$.
Logo, o termo independente de x ocupa a posição $p+1=18+1=19$.
Assim, o raio da esfera é 19 dm e a área da sua superfície é $S=4\pi\cdot 19^2=1444\pi\ dm^2$.

20) Considere o triângulo ABC dado abaixo, onde M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados AC, BC e AB, respectivamente, e k a razão da área do triângulo AIB para a área do triângulo IM_1M_2 e $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2-2x-11\right)\sqrt{2}$. Se um cubo se expande de tal modo que num determinado instante sua aresta mede 5 dm e aumenta à razão de $|f(k)|$ dm/min então podemos afirmar que a taxa de variação da área total da superfície deste sólido, neste instante, vale em dm^2/min

(A) $240\sqrt{2}$
(B) $330\sqrt{2}$
(C) $420\sqrt{2}$
(D) $940\sqrt{2}$
(E) $1740\sqrt{2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$k=\frac{S_{AIB}}{S_{IM_1M_2}}=\left(\frac{AB}{M_1M_2}\right)^2=2^2=4$$

$$|f(k)|=|f(4)|=\left(\frac{1}{2}\cdot 4^3+4^2-2\cdot 4-11\right)\sqrt{2}=29\sqrt{2}\ dm/min$$

$$S = 6a^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6a^2\right) = 12a \cdot \frac{da}{dt} = 12 \cdot 5 \cdot 29\sqrt{2} = 1740\sqrt{2}\ \mathrm{dm}^2/\mathrm{min}$$

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2016 – 2ª edição
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 5 Colégio Naval 1984-2015 – 2ª edição
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016